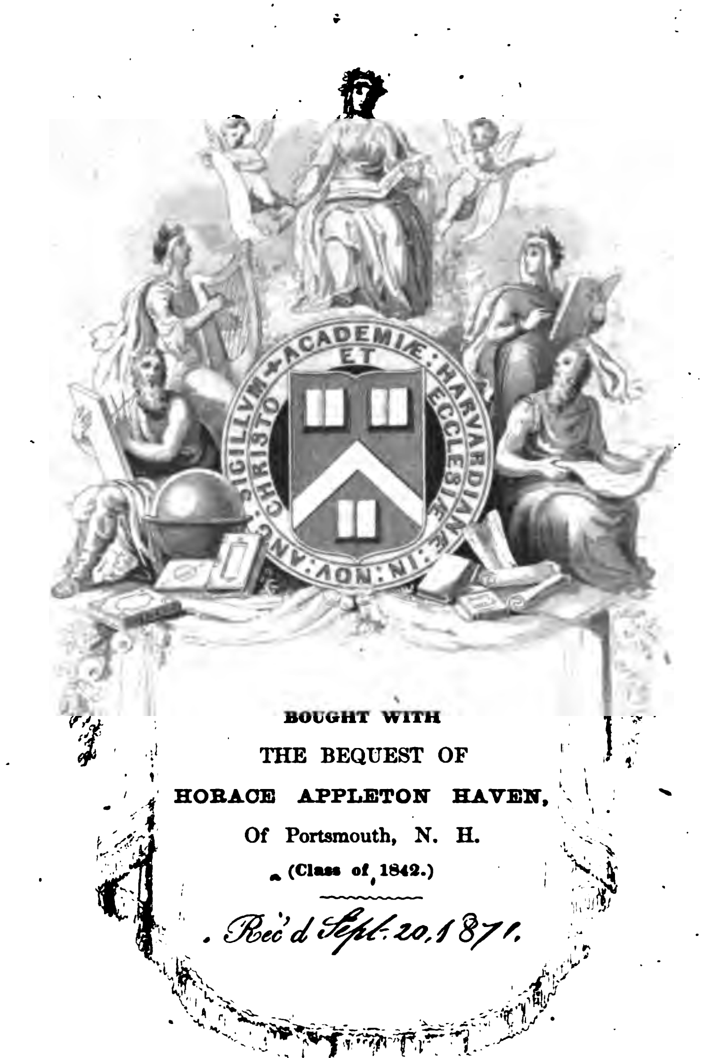



SIGILLVM ✠ ACADEMIÆ : HARVARDIANÆ : IN : NOV : ANG :
CHRISTO ET ECCLESIÆ
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)
Rec'd Sept. 20, 1871.



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIEME SÉRIE.

1864.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

24

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. C. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

E. PROUHET,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME TROISIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.

Quai des Augustins, n° 55.

1864.

1871, Sept. 20.
Haven Fund.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ÉTUDES
SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Plans tangents doubles et triples (*).

1. Un plan peut être assujetti à toucher une fois, deux fois ou trois fois une surface algébrique S^n du degré n, et, en outre, dans les deux premiers cas, à deux autres conditions ou à une seule, respectivement. Ces plans sont les *plans tangents simples*, les *plans tangents doubles* et les *plans tangents triples* de la surface.

2. On conclut de ce qui vient d'être dit, que les trois nombres ci-après sont finis et déterminés, savoir : 1° le nombre des plans tangents simples qui passent par une

---

(*) M. G. Salmon s'est occupé de cette question dans un Mémoire très-intéressant, lu en 1855 devant l'Académie royale d'Irlande, et imprimé dans le XXIIIe volume des *Transactions* de cette Société (1857) sous le titre : *On the degree of the surface reciprocal to a given one.*

Mais, en ce qui concerne notamment les plans tangents triples, après avoir indistinctement déduit la formule qui en exprime le nombre, comme une conséquence de certaines relations existantes entre les autres

droite donnée; 2° le nombre des plans tangents doubles qui passent par un point donné; 3° le nombre des plans tangents triples; et nous aurons à déterminer ces trois nombres, entre autres questions à résoudre.

3. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la surface donnée S^n n'a que les singularités qui lui sont propres, c'est-à-dire qu'elle est des plus générales dans son degré.

4. *Plans tangents simples.* — La théorie en est bien connue; il suffit donc de rappeler quelques-unes de leurs propriétés, qui seront utiles ci-après.

Un plan tangent quelconque coupe la surface suivant une courbe plane C^n qui a un point double au point de contact a. Les tangentes en a, aux deux branches de la C^n qui y passent, sont osculatrices de la surface et asymptotes de son *indicatrice* en ce point. Elles partagent la surface, autour du point a, en quatre régions opposées deux à deux par le sommet. La courbure de la surface, qui est nulle sur les tangentes dont il s'agit, change de signe quand on passe

---

singularités de la surface, le savant professeur s'exprime ainsi, p. 478 : « It would be desirable to test these results by obtaining the number » of triple tangent planes to a surface of the n[th] degree by a different » process. I have endeavoured to determine this number by the same me- » thod by which we determined the nature of the curve of contact of » double tangent planes to the surface... I have not succeeded, however, » in deriving the theory of triple tangent planes in this way. »

Dans une *Note*, en date du 12 février 1857 qui termine son Mémoire, M. G. Salmon reproduit, sans démonstration, une formule alors récente, due au D[r] Schläfli, mais qui fait connaître seulement la somme de deux nombres, dont l'un est le sextuple de celui des plans tangents triples. Enfin, dans son Traité récent sur la Géométrie à trois dimensions, le savant auteur reproduit purement et simplement sa première solution.

On voit donc, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans d'autres détails, que la question n'est pas épuisée.

Golfe du Mexique, octobre 1862.

d'une région à la région voisine. Ainsi, quand ces tangentes sont imaginaires, la surface a une courbure de même signe dans tous les azimuts autour de sa normale en a. Quand elles sont réelles et distinctes, la courbure, nulle dans quatre azimuts particuliers, change de signe alternativement en passant de l'un à l'autre. Enfin, si elles sont coïncidentes, la courbure ne change pas de signe; mais il y a un azimut où elle est nulle. Le point a est alors un point de rebroussement sur la courbe C^n, et, comme la tangente at en ce point représente deux tangentes infiniment voisines, il s'ensuit que le plan tangent qui les contient toutes deux est tangent à S^n suivant deux de ses éléments consécutifs. C'est une sorte de plan tangent double, parfaitement analogue aux tangentes d'inflexion des courbes planes qui sont aussi des tangentes doubles d'une espèce particulière. On lui donne indistinctement le nom de *plan d'inflexion* ou de *plan stationnaire;* nous adopterons cette dernière expression.

5. En chacun π des points de S^n où le plan tangent est stationnaire, l'indicatrice de la surface est une parabole; c'est ce qui a fait donner aux points π le nom de *points paraboliques,* et à la courbe gauche Π, qu'ils forment par leur succession, celui de *courbe parabolique de la surface.*

6. La courbe d'intersection de S^n par la surface $P^{(n-1)}$, première polaire d'un point P relative à cette surface, est la courbe du contour apparent de la surface, vue du point P. Cette courbe gauche est donc, en général, du degré $n(n-1)$; et tel est aussi le degré du cône circonscrit à S^n, qui a son sommet au point P.

7. Si le point P se meut sur une droite L, ses polaires premières forment un *faisceau* de surfaces du degré $(n-1)$. La courbe gauche $G^{\overline{n-1}^2}$, qui sert de *base* au

faisceau, est le lieu des points dont les plans polaires passent par la droite L ; c'est la *courbe polaire de* L relative à S^n. Cette courbe coupe S^n en $n(n-1)^2$ points. Tel est donc le nombre des plans tangents qu'on peut, en général, mener à une surface du degré n par une droite donnée ; en d'autres termes, telle est la *classe* de la surface donnée, quand elle ne possède ni points multiples, ni courbes multiples, c'est-à-dire quand elle n'a que les singularités qui lui sont propres.

8. *Plans tangents doubles*. — Si la courbe C^n, suivant laquelle le plan tangent à S^n en un point a coupe cette surface, possède un second point double, le plan tangent est un *plan tangent double*. Il en existe plusieurs espèces qu'on peut désigner et caractériser ainsi qu'il suit, savoir :

1re ESPÈCE. *Plans tangents stationnaires*. — Il en a été déjà question. La courbe C^n n'a qu'un point double ; mais c'est un point de rebroussement de première espèce. Ces plans établissent en quelque sorte la transition entre les plans tangents simples et les plans tangents doubles.

2e ESPÈCE. *Plans bitangents*. — Ils touchent la surface en deux points distincts, qui sont, sur la courbe C^n, des *nœuds* ou des *points isolés*.

3e ESPÈCE. *Plans bitangents unistationnaires*. — Les deux points de contact sont distincts ; l'un d'eux est situé sur la courbe parabolique Π. L'un des deux points doubles de la courbe C^n est un point de rebroussement de première espèce.

4e ESPÈCE. *Plans tangents bistationnaires*. — Les deux points doubles de la courbe C^n sont réunis en un seul ; en d'autres termes, deux branches de C^n se touchent au point de contact, suivant une droite qui a un contact du troisième ordre avec la surface. Le plan tangent est station-

naire en deux points consécutifs, situés nécessairement sur la courbe Π ; il touche S^n suivant la tangente à cette courbe au point de contact, et c'est cette tangente particulière de la courbe Π qui a avec S^n un contact du troisième ordre.

Remarque. — Les plans tangents de la troisième et de la quatrième espèce établissent la transition entre les plans tangents doubles et les plans tangents triples.

5e ESPÈCE. *Plans bitangents bistationnaires.* — Les deux points de contact sont distincts, mais situés l'un et l'autre sur la courbe Π. La courbe C^n a deux points de rebroussement de première espèce. Ces plans sont une espèce de plans tangents quadruples.

Avant d'entrer dans les détails relatifs à ces diverses espèces de plans tangents, il convient de rappeler, à titre de *lemmes*, quelques propositions préliminaires que j'ai énoncées ailleurs (*).

9. *Lemmes.* — 1° Les surfaces polaires premières de tous les points de l'espace, relatives à une même surface S^n, forment un *système* d'ordre $(n-1)$; celles de tous les points d'un plan forment un *réseau* ; celles de tous les points d'une droite forment un *faisceau*.

2° Quand deux surfaces d'un même système se touchent en un point, il y en a une infinité d'autres qui se touchent en ce point ; l'une d'elles y possède un *nœud* ou *point conique* ; et *le lieu des points de contact des surfaces du système est aussi le lieu de leurs points coniques*.

3° *Quand un point* P *est tel, que ses polaires premières, relatives à quatre surfaces d'un* système *quel-*

(*) *Voir* ma précédente *Étude sur les singularités des surfaces algébriques* (*Journal de M. Liouville*, t. VII, 2e série, p. 409).

conque, choisies de telle sorte qu'elles n'appartiennent pas ensemble à un même réseau *du système, passent par un même point* Q, *les polaires du point* P, *relatives à toutes les autres surfaces du système, passent aussi par le point* Q.

On peut dire que *le point* Q *est un point dont les plans polaires, relatifs à quatre surfaces quelconques du système, passent par un même point.*

4° *Le lieu du point* Q *est aussi le lieu des points de contact des surfaces du système. C'est une surface* $Q^{4(n-2)}$ *du degré* $4(n-2)$, quand le système se compose de surfaces du degré $(n-1)$.

On peut, d'après le (2°), désigner cette surface sous le nom de *surface nodale* de la proposée S^n, ainsi que je l'ai fait dans l'article précité.

5° *La surface nodale* $Q^{4(n-2)}$ *passe par les points de contact des plans tangents stationnaires de* S^n *et par ses nœuds ou ses courbes multiples, quand elle en possède.* Cette dernière hypothèse étant écartée, il s'ensuit que la courbe gauche $\Pi^{4n(n-2)}$, intersection de S^n et de $Q^{4(n-2)}$, est la courbe parabolique Π définie précédemment (n° 5) (*).

10. Cela posé, l'ensemble des plans tangents stationnaires forme une surface développable circonscrite à S^n le long de la courbe Π, et à laquelle on peut mener $4n(n-1)(n-2)$ plans tangents par un point quelconque P, puisque tel est le nombre des points d'intersection de la courbe Π avec la courbe du contour apparent de la surface, vue du point P.

(*) La démonstration de ces lemmes eût été intéressante; mais elle m'aurait entraîné dans des détails assez longs, et j'aurais couru le risque d'abuser de la gracieuse hospitalité que M. le Rédacteur a bien voulu accorder à cet article.

11. En général, la droite osculatrice suivant laquelle un plan stationnaire touche S^n, a une direction différente de celle de la tangente en ce point à la courbe Π; quand ces deux droites se confondent, le plan tangent devient bistationnaire, et correspond aux tangentes d'*ondulation* ou de *double inflexion* des courbes planes.

12. La considération des plans tangents stationnaires donne lieu à un théorème intéressant dont voici l'énoncé :

En chaque point de la courbe gauche G^{n^2}, *base d'un faisceau de surfaces* (S^n), *il passe en général quatre surfaces, dont chacune a un plan stationnaire en ce point.*

Le théorème (dû à M. Poncelet) relatif aux quatre cônes du second degré qui passent par la base d'un faisceau de surfaces du second ordre est, comme on voit, un cas particulier du précédent, qui n'est lui-même qu'un cas particulier d'un théorème plus général que je ferai connaître ailleurs.

13. *Plans bitangents* ou *plans tangents doubles* proprement dits (2e espèce). — Cherchons combien il passe de ces plans par un point quelconque P; et, pour rendre cette recherche plus claire, supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver combien il passe, par le point P, de plans tangents à S^n, qui soient en même temps tangents à une autre surface S^n égale à la première. Les plans tangents à ces deux surfaces, qui passent par le point P, forment deux cônes qui sont l'un et l'autre du degré $n(n-1)^2$ (n° 7). Donc, parmi ces plans, il y en a $n^2(n-1)^4$ qui touchent à la fois les deux surfaces.

Si l'on amène la deuxième surface à coïncider avec la première, le nombre précédent devra être diminué de celui des plans tangents qui, passant par P, touchent

cette surface en un point de la courbe G^{n^2}, suivant laquelle les deux surfaces se coupent un instant avant que la coïncidence soit établie. Car les plans tangents aux deux surfaces en chacun de ces points, plans qui étaient distincts avant la coïncidence, se confondent après en un seul, qui figure comme plan double parmi ceux qui sont compris dans le nombre $n^2(n-1)^4$, quoiqu'il ne soit plus alors qu'un simple plan tangent de la surface proposée. Or le nombre de ces plans est égal à celui des points d'intersection de la courbe G^{n^2} avec celle du contour apparent $G^{n(n-1)}$, donc à $n^2(n-1)$.

Actuellement, le nombre restant contient ensemble le triple du nombre réel des plans stationnaires et le double du nombre des plans bitangents; je veux dire que ces plans sont, par la nature même de la démonstration, comptés, les uns trois fois et les autres deux fois, dans la formule. Ainsi

$$2x+3y=n^2(n-1)^4-n^2(n-1).$$

Mais il a été prouvé plus haut (n° 10) que

$$y=4n(n-1)(n-2).$$

Donc

$$x=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12).$$

14. Les $n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$ points de contact de ces plans bitangents sont situés sur une surface du degré $(n-2)(n^3-n^2+n-12)$. Car si l'on fait mouvoir le point P sur une droite, les courbes de contour apparent, qui correspondent à ses positions successives, forment, sur la surface S^n, un faisceau de courbes $G^{n(n-1)}$. Or chacune des courbes ayant

$$n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$$

points communs avec la surface cherchée, laquelle ne passe pas généralement par les points qui forment la base du faisceau (puisque ce faisceau est quelconque, comme la droite L elle-même), il s'ensuit que la surface est du degré $(n-2)(n^3-n^2+n-12)$. Elle coupe S^n suivant une courbe gauche que nous appellerons Δ, dont le degré est $n(n-2)(n^3-n^2+n-12)$, et qui est le lieu des points de contact des plans bitangents. Les plans bitangents, circonscrits à S^n le long de la courbe Δ, enveloppent une surface développable de la classe

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12);$$

cette remarque nous sera utile plus tard.

15. Les plans tangents des troisième, quatrième et cinquième espèces, énumérées ci-dessus (8), sont nécessairement compris parmi ceux dont les points de contact se trouvent aux intersections des courbes Π et Δ. Ainsi leur nombre total est exprimé par la formule

$$N = 4n(n-2)^2(n^3-n^2+n-12),$$

et ils y sont compris dans les proportions suivantes, savoir :

Les plans bitangents unistationnaires, chacun une seule fois; nous en désignerons le nombre par x.

Les plans tangents bistationnaires, chacun deux fois. Car si a, b, c, d sont quatre points consécutifs d'une même droite, le long de laquelle le plan touche la surface, on peut le regarder comme tangent suivant $(abc)(cd)$, ou bien suivant $(ab)(bcd)$; nous désignerons par y le nombre de ces plans.

Les plans bitangents bistationnaires, chacun six fois. Car si les deux groupes de trois points consécutifs qui déterminent le double contact sont désignés par a, b, c;

d, *e*, *f*, on peut regarder chacun des plans dont il s'agit comme étant bitangent stationnaire de six manières distinctes, savoir :

$$(abc)(de);\quad (abc)(ef);\quad (abc)(fd);$$
$$(ab)(def);\quad (bc)(def);\quad (ca)(def).$$

On aura donc, en appelant z le nombre de ces plans,

$$N = x + 2y + 6z = 4n(n-2)^2(n^3 - n^2 + n - 12).$$

Les plans, dont le nombre est désigné par y, touchent S^n le long d'une droite qui a un contact du troisième ordre avec la surface. Or, M. G. Salmon a démontré, dans le tome IV du *Journal mathématique de Cambridge*, que les points de S^n, où une droite a un tel contact avec la surface, sont situés sur une surface du degré $11n - 24$. Cette surface coupe S^n suivant une courbe gauche Γ, du degré $n(11n-24)$, qui a par conséquent

$$4n(n-2)(11n-24)$$

points communs avec la courbe Π. Mais il est aisé de voir que ces courbes se touchent partout où elles se rencontrent, et qu'il faut ne prendre, pour y, que la moitié du nombre précédent. Car le plan bistationnaire ne peut toucher S^n suivant deux droites coïncidentes ayant un contact du troisième ordre avec la surface, que si cette droite (double) est une tangente de la courbe Π. Les deux points infiniment voisins de cette courbe jouissent donc alors de la propriété que, par chacun d'eux, il passe une droite biosculatrice de la surface, c'est-à-dire qu'ils appartiennent aussi à la courbe Γ. On a donc

$$2y = 4n(n-2)(11n-24),$$

d'où

$$x + 6z = N - 2y = 4n(n-2)(n-3)(n^3 + 3n - 16),$$

et, comme S^n ne possède qu'accidentellement des plans tangents de l'espèce z, on peut écrire, en général,

$$x = 4n(n-2)(n-3)(n^3+3n-16).$$

16. *Plans tangents triples.* — Si la courbe C^n, suivant laquelle le plan tangent en a coupe S^n, possède deux autres points doubles d, b, le plan touche la surface en ces trois points; c'est un *plan tangent triple*. Nous en connaissons déjà trois espèces, classées parmi les plans tangents doubles. Il en existe deux autres, qui se divisent chacune en plusieurs variétés, savoir :

1re *espèce.* — Les plans tangents triples proprement dits, ou *plans tritangents,* dont les trois points de contact sont distincts;

2e *espèce.* — Les plans ayant un triple contact avec S^n en un même point.

17. La première espèce comprend quatre variétés, qui sont :

1° Les plans *tritangents ordinaires,* dont les trois points de contact (qui appartiennent à la courbe Δ et qui en sont des points doubles) sont, sur la courbe plane C^n, des nœuds ou des points isolés;

2° Les plans *tritangents unistationnaires,* dont l'un des trois points de contact, situé à la fois sur les courbes Π et Δ, est un point de rebroussement de la courbe C^n;

3° Les plans *tritangents bistationnaires,* dont deux points de contact sont des points de rebroussement sur la courbe C^n;

4° Enfin, les plans *tritangents tristationnaires,* dont les trois points de contact sont des points de rebroussement sur la courbe C^n.

18. Le plan tangent appartient à la deuxième espèce, quand les trois points doubles de la courbe C^n se réunis-

sent en un seul, pour former un point triple. Ce point triple étant susceptible d'appartenir à plusieurs variétés, il en est de même du plan tangent; mais comme cette singularité n'appartient pas à une S^n quelconque, il est inutile d'insister sur ce sujet. Quand un plan tangent appartient à la deuxième espèce, une tangente quelconque de S^n, menée par le point de contact, est osculatrice de la surface en ce point; et elle est biosculatrice dans trois directions (celles des tangentes aux trois branches de C^n), dont une est toujours réelle. Un tel point de contact est donc tel, que le plan tangent est stationnaire dans toutes les directions autour de lui, et ce point de contact est un véritable *ombilic* d'une espèce particulière. La surface est, en ce point singulier, osculée par un plan, ou, si l'on veut, par un cône d'une ouverture égale à 180 degrés.

19. *Plans tritangents.* — Si l'on se représente l'ensemble des plans bitangents qui sont circonscrits à S^n le long de la courbe Δ, ceux d'entre eux qui touchent S^n en un troisième point sont les plans tangents triples dont il s'agit de trouver le nombre. Adoptant un mode de solution analogue à celui du n° 13, cherchons d'abord combien il y a de ces plans qui touchent une seconde surface égale à S^n. Or les plans bitangents de S^n forment une surface développable dont la classe est marquée par le nombre

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$

c'est-à-dire à laquelle on peut mener ce nombre de plans tangents par un point quelconque (n° 14).

Donc il y en a

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)\times n(n-1)^2$$

qui touchent cette seconde surface. Mais chacun d'eux se trouvera répété trois fois, après que la coïncidence des surfaces aura été établie ; on aura donc d'abord

$$3t'' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 19n^4 + 40n^3 - 37n^2 + 12n).$$

Il faut déduire de ce nombre celui des points de rencontre de la courbe Δ avec la courbe G^{n^2} suivant laquelle les deux surfaces se coupaient, alors qu'on les supposait distinctes, savoir: $n^2(n-2)(n^3-n^2+n-12)$, et il vient

$$3t' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 21n^4 + 42n^3 - 39n^2 + 36n).$$

Il faut ensuite en retrancher le nombre des plans bitangents unistationnaires, qui forment une espèce à part, et dont les points de contact se trouvent aux points de rencontre des courbes Δ et Π; et, comme chacun de ces plans en représente trois superposés, le nombre à soustraire est

$$\frac{1}{2} n(n-2)(24n^4 - 72n^3 + 72n^2 - 336n + 576).$$

Enfin, en chacun des points de rencontre (qui sont, comme on l'a dit, des points de tangence) de la courbe parabolique Π avec la courbe Γ, lieu des points de contact des droites biosculatrices, le plan tangent est un plan tangent bistationnaire, espèce ci-après examinée, et étrangère à celle qui nous occupe ici. Chacun de ces plans est d'ailleurs compris deux fois dans la formule générale, parce qu'il y a deux manières d'assembler quatre points consécutifs a, b, c, d, de manière à en former deux groupes, composés, l'un de trois, et l'autre de deux points consécutifs, savoir : (abc) (cd) et (ab) (bcd). Le deuxième nombre à soustraire est donc

$$2.4n(n-2)(11n-24),$$

et il vient enfin, pour le nombre cherché t,

$$t=\frac{1}{6}n(n-2)$$
$$\times(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-111n^2+548n-960);$$

formule dans laquelle il est aisé de vérifier que le second membre est toujours un nombre entier, comme cela doit être par la nature même de la question.

20. On trouve ainsi qu'*une surface du troisième ordre possède, en général,* 135 *plans tangents triples,* dont chacun par conséquent coupe la surface suivant trois droites; ce qui s'accorde avec cet autre théorème, savoir : qu'*il existe sur la surface* 27 *droites, par chacune desquelles on peut mener cinq plans tangents triples* (*).

Dans le cas d'une surface du quatrième ordre, on a $t=3200$. *Il y a donc* 3200 *plans distincts, dont chacun coupe la surface suivant une* C^4 *douée de trois points doubles.*

21. Quant aux plans tangents triples, dont les trois points de contact coïncident, les seuls dont une surface soit douée, en général, sont les plans tangents bistationnaires, dont le nombre t' est donné par la formule

$$t'=2n(n-2)(11n-24).$$

Par exemple, *il y a* 54 *plans différents, dont chacun coupe une surface du troisième ordre suivant une conique et une droite tangentes entre elles;* en d'autres termes, si, autour de chacune des 27 droites de la surface, on fait tourner un plan, il y aura deux positions du plan pour chacune desquelles la conique, suivant laquelle le plan

(*) Ces deux beaux théorèmes, dont j'ai eu occasion de donner une démonstration dans les *Nouvelles Annales*, sont dus à M. Cayley (*voir* t. XVIII, p. 129).

coupe S^3, touchera la droite; résultat d'ailleurs facile à prévoir : car si on fait tourner un plan autour d'une des 27 droites de la surface, les coniques suivant lesquelles il coupe S^3 marquent sur la droite deux séries de points en involution, et chacun des deux points doubles de cette involution est le point de contact d'une conique qui, conjointement avec la droite, satisfait à la question.

22. Il nous reste à faire connaître quelques propriétés intéressantes qui caractérisent, à d'autres points de vue, les principales espèces de plans tangents d'une surface S^n, et qui sont relatives aux surfaces polaires et nodales de cette surface.

Nous avons vu (n° 9, 4°) que le lieu des points de contact des surfaces polaires premières de S^n est une surface $Q_0^{4(n-2)}$, qui est en même temps le lieu de leurs points coniques.

On sait que chaque point Q de cette surface a, pour surface $\overline{n-2}^{ième}$ polaire, un cône du second degré, dont le sommet P a pour polaire première celle des polaires qui a un point conique au point Q (*). Les points P et Q sont ainsi correspondants ou réciproques l'un de l'autre. Le lieu du point P est une surface $P_0^{4(n-2)^3}$, du degré $4(n-2)^3$. On peut appeler les surfaces P_0, Q_0, *surfaces nodales conjuguées* de la proposée S^n, en adoptant l'expression consacrée par M. Steiner dans la théorie des courbes planes, pour une circonstance analogue à celle dont il est ici question.

23. Cela posé, le plan T, tangent à la surface P_0 au

(*) *Voir* l'*Étude* déjà citée sur les points doubles des surfaces algébriques (*Journal de M. Liouville*, t. VII, 2e série). Je donnerai dans une autre occasion la démonstration de ce théorème et de quelques autres que, faute d'espace, je n'ai pu qu'énoncer.

point P, réciproque d'un point de Q, contient tous les points de l'espace dont les surfaces polaires passent au point Q, et particulièremeut une droite, passant par P, dont les points sout les pôles des polaires qui se touchent au point Q. Le plan T n'est donc autre chose que le plan polaire du point Q, et l'on peut dire que *la surface nodale* P_0 *est enveloppée par les plans polaires des points de l'autre nodale* Q_0. Quand le point Q est sur S^n, le plan M, tangent à S^n, est stationnaire le long de deux droites infiniment voisines, disons le long de la droite double osculatrice de S^n en ce point. Ce plan touche la surface P_0 au point P; donc *la surface développable, formée par tous les plans stationnaires de* S^n, *et circonscrite à* S^n, *le long de la courbe parabolique* Π, *est aussi circonscrite* (*mais par un contact simple*) *à la surface nodale* P_0.

Si $n=3$, les surfaces nodales Q_0 et P_0 se confondent en une seule Q^4, du quatrième ordre, lieu des sommets des cônes polaires. Donc

La surface nodale d'une surface du troisième ordre S^3 *passe par les points de contact des plans stationnaires de cette surface, et leur est tangente en un autre point*; théorème analogue à celui qui a lieu pour les courbes planes du troisième ordre.

Dans le cas de n quelconque, le cône du second degré, $\overline{n-2}^{ième}$ polaire du point Q, et dont le sommet est au point P, a avec S^n, au point a, un contact stationnaire le long de la droite double qui est osculatrice de S^n.

24. Si le plan M est un plan tangent bistationnaire de S^n, les polaires qui se touchent en Q ont un contact stationnaire en ce point, et le plan M touche la surface nodale P_0 au point P, par un contact stationnaire. La droite PQ est en outre tangente en Q à la courbe parabolique Π (15), donc à l'autre surface nodale Q_0.

25. Enfin, si le plan M est un plan tangent de la deuxième espèce (18), il est stationnaire dans toutes les directions (19); il y a donc une infinité de faisceaux de polaires, respectivement tangentes entre elles au point Q, qui forment un réseau dont la surface commune est celle qui est douée du point conique. Leurs pôles sont distribués respectivement sur toutes les droites menées par le point Q dans le plan M; et, comme elles doivent toutes toucher la surface nodale P_0 au point P (23), il s'ensuit nécessairement que les points P et Q coïncident. On voit encore que le cône, $\overline{n-2}^{\text{ième}}$ polaire du point Q, devant avoir un contact stationnaire avec chacune de ces droites, se réduit à deux plans coïncidents, confondus avec le plan tangent M.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 563, 564 *et* 565 (Faure)

(voir t. XX, p. 56);

Par M. CREMONA.

1. On donne un faisceau de courbes de l'ordre n, ayant n^2 points communs. Quel est le lieu des foyers (*) de ces courbes? Pour connaître l'ordre de ce lieu, il suffit de découvrir le nombre de foyers qui tombent sur une droite quelconque, par exemple sur la droite à l'infini.

Parmi les courbes du faisceau, il y en a $2(n-1)$ du

(*) On appelle *foyers* d'une courbe les intersections des tangentes menées à la courbe par les deux points circulaires à l'infini.

genre parabolique, c'est-à-dire qui sont tangentes à la droite à l'infini. Ces courbes seules peuvent avoir des foyers à l'infini.

Soient ω, ω' les points circulaires à l'infini. Si par chacun de ces points on mène les $n(n-1)$ tangentes à une courbe du faisceau, les $n^2(n-1)^2$ intersections de ces tangentes sont les foyers de la courbe. Lorsque celle-ci est parabolique, il n'y a que $n(n-1)-1$ tangentes (autres que la droite à l'infini) issues de ω ou de ω'; donc $[n(n-1)-1]^2$ foyers seulement seront à distance finie; les autres $2n(n-1)-1$ tombent à l'infini. Cela doit être répété pour chacune des $2(n-1)$ courbes paraboliques; donc la droite à l'infini contient

$$2(n-1)[2n(n-1)-1]$$

foyers, et par conséquent ce nombre est l'ordre du lieu cherché.

De ces foyers à l'infini, $2(n-1)$ sont les points de contact des courbes paraboliques avec la droite $\omega\omega'$; les autres $4(n-1)[n(n-1)-1]$ coïncident évidemment avec ω, ω'; donc, chacun des points circulaires est multiple, suivant le nombre $2(n-1)[n(n-1)-1]$.

Parmi les courbes du faisceau, il y en a $3(n-1)^2$ qui ont un point double; ces $3(n-1)^2$ points sont des points doubles aussi pour la courbe des foyers.

En résumé : Le lieu des foyers de toutes les courbes de l'ordre n, ayant n^2 points communs, est une courbe de l'ordre

$$2(n-1)[2n(n-1)-1],$$

qui passe $2(n-1)[n(n-1)-1]$ fois par chacun des points circulaires à l'infini, et deux fois par chacun des $3(n-1)^2$ points doubles des courbes données.

Pour $n=2$ on a le théorème de M. Faure, qui constitue la question 565, savoir : *le lieu des foyers des co-*

niques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre.

2. Soit donnée une série de courbes de la classe m, c'est-à-dire le système de toutes les courbes de cette classe qui ont m^2 tangentes communes. En suivant le même raisonnement, on trouve que le lieu des foyers est une courbe de l'ordre $2n-1$, ayant deux points imaginaires, multiples de l'ordre $n-1$, situés à l'infini sur un cercle, et un seul point réel à l'infini, déterminé par la courbe qui, seule dans le système donné, est parabolique.

3. Soient données quatre droites abc, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$ formant un quadrilatère complet, dont a et a', b et b', c et c' sont les sommets opposés. Les diagonales aa', bb', cc' forment un triangle ABC (A intersection de bb' et de cc', etc.). Considérons les coniques inscrites dans le quadrilatère donné : parmi ces coniques, il y a une parabole et trois systèmes de deux points, c'est-à-dire (a, a'), (b, b'), et (c, c').

Toute conique du système considéré a quatre foyers : ce sont les quatre intersections des tangentes menées par les points circulaires ω, ω'. Pour la parabole, trois foyers tombent à l'infini en ω, ω' et au point i où la parabole est tangente à la droite $\omega\omega'$. Ce dernier point est sur la droite qui passe par les milieux des diagonales aa', bb', cc', parce que cette droite contient les centres de toutes les coniques du système. La parabole a un quatrième foyer o, qui n'est pas à l'infini : c'est l'intersection des tangentes $o\omega$, $o\omega'$ à la courbe, qui passent par les points circulaires.

Les deux triangles $o\omega\omega'$, bca' étant circonscrits à une même conique (la parabole du système), sont inscrits dans une seconde conique. Mais toute conique passant par ω, ω' est un cercle : donc o appartient au cercle qui

passe par b, c, a'. De même pour les triangles cab', abc', $a'b'c'$; donc, le foyer o de la parabole est le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les droites données.

En vertu de ce qu'on a observé au n° 2, le lieu des foyers des coniques (courbes de la deuxième classe) tangentes aux quatre droites données est une courbe du troisième ordre passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire une *cubique circulaire,* selon l'expression de M. Salmon. Cette courbe a une seule asymptote réelle, qui est parallèle à la droite des centres. Les six sommets du quadrilatère appartiennent aussi à la cubique, parce que ces points sont des foyers pour les coniques (a, a'), (b, b'), (c, c').

Ainsi, sur chacune des diagonales aa', bb', cc' nous connaissons deux points de la cubique, lieu des foyers : cherchons la troisième intersection.

Si l est cette troisième intersection de la diagonale aa' par la cubique, les droites $l\omega$, $l\omega'$ seront tangentes à une même conique du système. Or, les couples des tangentes menées par l aux coniques du système forment une involution. La diagonale aa' est un rayon double de cette involution, parce qu'elle est la seule tangente qu'on puisse mener de l à la conique (a, a'). Le second rayon double est lA; en effet, A est le pôle de aa' par rapport à toute conique du système, donc lA est tangente en l à la conique du système qui passe par l.

Deux droites conjuguées de l'involution (les tangentes menées par l à une même conique du système) et les droites doubles doivent former un faisceau harmonique; par conséquent, l'angle des droites laa', lA doit être divisé harmoniquement par $l\omega$, $l\omega'$. Mais si, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués passent par les points circulaires à l'infini, on sait que les deux

autres sont rectangulaires (*); donc, laa' et lA sont à angle droit, c'est-à-dire, les troisièmes intersections de la cubique par les diagonales sont les pieds l, m, n des hauteurs du triangle ABC.

Remarquons que les neuf points a, a', b, b', c, c', l, m, n ne suffisent pas pour déterminer la cubique dont il s'agit. En effet, par ces points passent les trois aa', bb', cc' et, par conséquent, un nombre infini d'autres courbes du troisième ordre. Pour déterminer notre courbe, lieu des foyers, ajoutons qu'elle est circulaire, qu'elle a son asymptote réelle parallèle à la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère, et qu'elle passe par le point o commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère.

Ainsi, les théorèmes de M. Faure (**) sont démontrés.

Question 491

(voir tome XVIII, page 443);

Par M. CREMONA.

1. A est une courbe de l'ordre n, B une conique, dans un même plan. D'un point quelconque situé sur A on abaisse une perpendiculaire sur la polaire de ce point relativement à B. 1° Quelle est l'enveloppe de cette perpendiculaire? 2° Quel est le lieu du pied de la perpendiculaire?

(*) On peut définir ces droites qui vont aux points circulaires à l'infini comme les rayons doubles de l'involution engendrée par un angle droit qui tourne autour de son sommet fixe. (Chasles, *Géométrie supérieure.*)

(**) 563. *La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales passe par les points circulaires à l'infini.*

564. *Cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère et rappelle le cercle dans la théorie des courbes du troisième ordre.*

Deux droites perpendiculaires sont polaires conjuguées par rapport à la conique (enveloppe de deuxième classe) formée par les points circulaires ω, ω' à l'infini; ainsi, le premier problème revient à celui-ci :

Soit m un point quelconque de A; M *la droite polaire de m, relativement à la conique* B; μ *le pôle de* M, *relativement à la conique* (ω, ω'), *c'est-à-dire le conjugué harmonique du point à l'infini sur* M, *par rapport à* (ω, ω'); *quelle est l'enveloppe de la droite* $m\mu$?

Cherchons combien de droites analogues à $m\mu$ passent par un point arbitraire o. Si l'on mène par o une droite quelconque qui rencontrera A en n points $m, m',\ldots$, les polaires M, M',..., de ces points, par rapport à la conique B, auront leurs pôles $\mu, \mu',\ldots$, relatifs à (ω, ω'), situés sur n droites $o\mu, o\mu',\ldots$. Si, au contraire, on mène arbitrairement une droite $o\mu$ (μ point à l'infini), soit ν le conjugué harmonique de μ, par rapport à (ω, ω'); du point ν on pourra mener n tangentes M, M',.... à la courbe A' polaire réciproque de A, par rapport à la conique B. Ces tangentes auront leurs pôles $m, m',\ldots$, relatifs à B, situés sur n droites $om, om',\ldots$. Ainsi, à une droite om correspondent n droites $o\mu$, et à une droite $o\mu$ correspondent n droites om. Donc, par un principe connu (dont M. de Jonquières a fait un heureux usage), il y aura $2n$ coïncidences de deux droites om, $o\mu$ correspondantes; c'est-à-dire, l'enveloppe de $m\mu$ est une courbe K de la classe $2n$.

2. Si m est à l'infini (sur la courbe A), la droite $m\mu$ tombe entièrement à l'infini; donc la droite à l'infini est une tangente de K multiple suivant n, c'est-à-dire K a $2n$ branches paraboliques. Ainsi, K n'a que n tangentes parallèles à une direction donnée, ou bien passant par un point μ donné à l'infini. Si ν est le conjugué harmonique

de μ par rapport à ω, ω', et $m, m', \ldots$, les pôles, relatifs à B, des n tangentes de A' qui passent par ν, les droites $m\mu$, $m'\mu, \ldots$ seront les n tangentes de K qui aboutissent à μ. Si ν est un point (à l'infini) de A', deux tangentes de cette courbe coïncident et, par conséquent, deux tangentes $m\mu$ de K coïncideront aussi, c'est-à-dire μ sera un point de K. Il s'ensuit que la courbe K a $n(n-1)$ asymptotes respectivement perpendiculaires aux asymptotes de A'. En particulier, si ν tombe en ω, le point μ y tombe aussi; donc, si A' a des branches (imaginaires) passant par ω, ω', la courbe K y passe autant de fois.

3. Les droites tangentes des courbes A' et K correspondent entre elles, une à une. En effet, si l'on donne M tangente de A', soient m, μ les pôles de M par rapport aux coniques B et (ω, ω'); $m\mu$ sera la tangente de K qui correspond à M. Réciproquement, soit N une tangente de K, ν le pôle de N par rapport à (ω, ω'); la droite polaire de ν par rapport à la conique B coupera N en un point m, et la droite polaire de m par rapport à la même conique B sera la tangente de A' qui correspond à N. Cela étant, le deuxième problème que je me suis proposé peut être énoncé comme suit :

Trouver le lieu du point commun à deux tangentes correspondantes des courbes A', K.

Menons une transversale arbitraire et cherchons combien de fois deux tangentes correspondantes de A', K se rencontrent sur cette transversale. D'un point quelconque p de la transversale on peut mener n tangentes à A'; les n tangentes correspondantes de K rencontreront la transversale en n points q. Réciproquement, d'un point quelconque q de la transversale on peut mener $2n$ tangentes à K; les $2n$ tangentes correspondantes de A' couperont la transversale en $2n$ points p. Ainsi, à un

point p correspondent n points q, et à un point q correspondent $2n$ points p. Donc, il y aura sur la transversale $3n$ coïncidences de deux points p, q correspondants, c'est-à-dire, le lieu cherché est une courbe H de l'ordre $3n$.

Par chacun des points ω, ω' passent n tangentes de A' et les n tangentes correspondantes de K; donc, les points circulaires à l'infini sont des points multiples suivant n, pour la courbe H.

Nous avons vu que la droite à l'infini représente n tangentes de K; par conséquent, les points à l'infini sur les n tangentes correspondantes de A' appartiendront à H; c'est-à-dire, la courbe H a n asymptotes respectivement parallèles aux diamètres de la conique B, qui sont conjugués aux directions des asymptotes de A.

Il est évident que la courbe H passe par les $2n$ intersections de A et B.

4. Si l'on fait $n = 2$ (question 491), A et A' sont deux coniques (polaires réciproques par rapport à B); K est de la quatrième classe et H est du sixième ordre. Je vais considérer deux cas particuliers.

1° Soient A, B et, par conséquent, A' des paraboles semblables; a leur point commun à l'infini. La polaire de a, par rapport à B, est la droite à l'infini : donc, toute droite menée par a est une tangente de K, c'est-à-dire que cette enveloppe est composée du point a (enveloppe de première classe) et d'une courbe K' de troisième classe. D'un point quelconque ν à l'infini on peut mener une seule tangente à la parabole A' : donc il y a une seule tangente de K' qui aboutit à μ, conjugué harmonique de ν par rapport à (ω, ω'). Mais si ν tombe en a, cette tangente de A' tombe à l'infini ; par conséquent, au point a', conjugué harmonique de a par rapport à (ω, ω'), il n'y

a qu'une tangente de K′, la droite à l'infini. Cela signifie que a' est un point d'inflexion de K′, et la droite à l'infini est la tangente relative, c'est-à-dire que K′ a deux branches perpendiculaires (avec les convexités intérieures) aux diamètres des paraboles données; autrement K′ est une *parabola cuspidata* (classification newtonienne).

Lorsque A est une conique quelconque, la droite à l'infini représente deux tangentes de K; dans le cas que nous considérons, les tangentes correspondantes de A′ tombent elles-mêmes à l'infini : donc, tout point à l'infini compte deux fois comme point du lieu H; par conséquent ce lieu se décompose en deux droites qui coïncident à l'infini et en une courbe H′ du quatrième ordre. On voit aisément que H′ passe par les points circulaires et touche en a la droite à l'infini, c'est-à-dire que H′ a deux branches paraboliques parallèles aux branches des paraboles données.

2° Soient A, B, et, par conséquent, A′ des cercles concentriques, c'est-à-dire des coniques passant par ω, ω' et ayant en ces points les mêmes tangentes $o\omega$, $o\omega'$ (o centre commun des cercles). On conclut immédiatement de la théorie générale que, dans ce cas particulier, K se réduit à quatre points, dont deux coïncident en o; les deux autres sont ω, ω'; et H se décompose en quatre droites et un cercle; les quatre droites coïncident deux à deux avec $o\omega$ et $o\omega'$: le cercle est A′.

5. Pour $n = 1$, on a ce théorème connu :

On donne une droite A et un faisceau A′ de droites : les points de A′ correspondent anharmoniquement aux rayons de A′; d'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le rayon correspondant. L'enveloppe de cette perpendiculaire est une parabole; le lieu du pied de la perpendiculaire est une *cubique circulaire* dont l'asymptote

réelle est parallèle au rayon de A′ qui correspond au point à l'infini de A.

6. On démontre d'une manière analogue les théorèmes dans l'espace :

A est une courbe gauche de l'ordre n ; B une surface du second degré. D'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le plan polaire de ce point relativement à B; le lieu de cette perpendiculaire est une surface gauche du degré $2n$, qui a n génératrices à l'infini et un cône asymptote de l'ordre n, dont les génératrices sont respectivement perpendiculaires aux plans tangents du cône asymptote de la surface développable A′, polaire réciproque de A par rapport à B.

Le lieu du pied de la perpendiculaire est une courbe gauche de l'ordre $3n$ qui a $2n$ points sur le cercle imaginaire à l'infini.

Si $n=1$, on a ce théorème :

On donne une droite A dont les points correspondent anharmoniquement aux plans passant par une deuxième droite A′. D'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le plan correspondant; le lieu de la perpendiculaire est un paraboloïde qui a un plan directeur perpendiculaire à la droite A′; le lieu du pied de la perpendiculaire est une courbe gauche du troisième ordre (cubique gauche) qui passe par les points où le plan directeur nommé rencontre le cercle imaginaire à l'infini. On peut donner à cette espèce de *cubique gauche* le nom de *cercle gauche* ou *cubique gauche circulaire*.

Questions 677, 678 *et* 679 (Schröter)

(voir 2e série, t. II, p. 522);

PAR M. CREMONA.

On trouve démontré analytiquement dans les Mémoires

de MM. Hesse et Cayley, et géométriquement dans mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, que dans un réseau (*rete*) de coniques (*) il y en a certaines, en nombre infini, qui se réduisent à deux droites, et que ces droites enveloppent une courbe (générale) de troisième classe, que j'ai nommée *courbe cayleyenne* du réseau (**). Les trois tangentes qu'on peut mener à cette courbe par un point donné o sont les trois côtés du quadrangle complet inscrit aux coniques du réseau qui passent par o.

Un réseau est déterminé par trois coniques données et contient toutes les coniques des trois faisceaux auxquels les coniques données, considérées deux à deux, donnent lieu. Donc

Trois coniques quelconques ont généralement, deux à deux, six cordes communes; les dix-huit cordes qui en résultent touchent une même courbe de la troisième classe (question 679).

Si les trois coniques données (et par conséquent toutes celles du réseau) ont un point commun o, les neuf droites qui joignent o aux neuf points d'intersection des coniques (deux à deux) seront tangentes à la *cayleyenne*. Mais une courbe (propre) de la troisième classe ne peut admettre que trois tangentes au plus, issues d'un même point; donc, dans le cas actuel, la cayleyenne se décompose en une enveloppe de première classe (le point o)

(*) Un réseau de coniques est l'ensemble de toutes les coniques assujetties à trois conditions communes telles, que par deux points pris à volonté sur le plan il ne passe qu'une seule de ces coniques.

(**) M. Steiner a donné à cette courbe, dans le cas d'un réseau d'ordre quelconque, le nom de *courbe nodale* du réseau, dénomination adoptée par plusieurs géomètres. (*Voir* aussi, à ce sujet, la page 19 ci-dessus, ligne 24.)

et en une enveloppe de deuxième classe (une conique); donc

Si trois coniques ont un point commun, les neuf côtés des trois triangles qui sont formés par les autres points d'intersection des coniques, considérées deux à deux, touchent une même conique (question 678).

On déduit des mêmes considérations le théorème suivant, très-connu :

Si trois coniques ont une corde commune, les autres cordes communes aux coniques, considérées deux à deux, passent par un même point.

La question 677 est l'inverse de 678. Soient donnés trois triangles $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, circonscrits à une même conique K; les sommets de ces triangles, considérés deux à deux, déterminent trois coniques C_1, C_2, C_3, c'est-à-dire

$$C_1 \equiv (a_2 b_2 c_2 a_3 b_3 c_3), \quad C_2 \equiv (a_3 b_3 c_3 a_1 b_1 c_1), \quad C_3 \equiv (a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2).$$

La cayleyenne du réseau déterminé par les trois coniques C_1, C_2, C_3 aura, d'après la définition de cette courbe, neuf tangentes (les côtés des trois triangles) communes avec la conique K. Mais une courbe (propre) de troisième classe et une conique ne sauraient avoir que six tangentes communes au plus; donc la cayleyenne est formée par deux enveloppes partielles, la conique K et un point.

Soit o la quatrième intersection de C_2 et C_3 (outre $a_1 b_1 c_1$), et supposons qu'une conique C soit décrite par $oa_2 b_2 c_2 a_3$ et qu'elle rencontre C_2 en β_3, γ_3 (outre oa_3). En vertu d'un théorème démontré ci-devant (question 678), les côtés des triangles $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ seront tangents à une même conique, la conique donnée K. Mais K ne peut pas admettre quatre tangentes distinctes

a_3 (b_3, c_3, β_3, γ_3) issues d'un même point a_3; donc les triangles $a_3 b_3 c_3$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ doivent coïncider, c'est-à-dire la conique C se confondra avec C_1. Ainsi « les trois coniques C_1, C_2, C_3 ont un point commun o. »

Du théorème 679 on tire aisément les suivants :

Si l'on donne un faisceau de coniques conjointes C (*) *et une autre conique quelconque* K, *les cordes communes à* K *et à une conique* C *enveloppent une courbe de troisième classe tangente aux droites conjointes du faisceau et ayant un foyer au centre commun des coniques* C. *Et le lieu des points où se rencontrent deux à deux les cordes opposées est une courbe du troisième ordre qui passe par le centre et par les points à l'infini sur les axes principaux des coniques* C.

Si l'on donne un système de coniques confocales C *et une autre conique quelconque* K, *le lieu des sommets des quadrilatères complets circonscrits à* K *et à une conique* C, *est une courbe de troisième ordre qui passe par les foyers du système* C *et par les deux points circulaires à l'infini. Et les diagonales des quadrilatères nommés enveloppent une courbe de troisième classe tangente aux axes principaux des coniques* C *et à la droite à l'infini.*

Mêmes questions;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Ces théorèmes sont bien loin d'être nouveaux. M. Cayley démontre le corrélatif, par voie de dualité, du plus

(*) Coniques concentriques et décrites par quatre points (imaginaires) appartenant à un cercle de rayon nul (*Memoria sulle coniche e sulle superficie di second'ordine congiunte; Annali di Matematica*, t. III; Roma, 1861).

important d'entre eux, dans le tome X du *Journal de Liouville* (année 1845), p. 104. Ils font aussi tous partie du cours que M. Chasles professe depuis longtemps à la Sorbonne. Ils ont leur place naturelle dans la théorie des sections coniques, où ils se présentent comme la conséquence de propositions plus générales. M. Chasles se proposant de publier prochainement un traité complet de ces courbes, je ne reproduirai pas ici ses démonstrations, malgré l'intérêt qu'elles ne manqueraient pas d'offrir aux jeunes lecteurs des *Nouvelles Annales*. Mais en voici d'autres qui, si elles ne font pas ressortir le lien qui rattache ces théorèmes à la théorie générale des coniques, sont du moins très-simples et très-directes.

I. Théorème. — *L'enveloppe des cordes communes à une conique fixe* U *et à un faisceau* (C) *de coniques est une courbe de troisième classe.*

Il suffit de prouver que, par un point P, il ne passe que trois de ces cordes communes. Pour plus de simplicité, prenons ce point arbitrairement sur le périmètre de la conique U. Il est évident que les seules cordes communes qui aboutissent en P, sont les cordes communes à U et à la conique unique du faisceau qui passe en P. Ces cordes sont donc au nombre de trois, dont une est toujours réelle; ce qui démontre le théorème.

Le raisonnement fort simple qui précède est rigoureux. Il ne serait en défaut, que si le point P appartenait à la courbe enveloppe. Mais pour cela il faudrait qu'il fût le point de concours de deux cordes communes infiniment voisines; circonstance très-exceptionnelle, puisqu'elle suppose, 1° que, parmi les coniques du faisceau, il y en a une ou plusieurs qui aient, avec la conique U, un contact du second ordre, ce qui n'a pas lieu en général; et 2° qu'on ait choisi précisément le point de contact pour

en faire le point P, qui, au contraire, est, par hypothèse, choisi d'une façon tout à fait arbitraire sur le périmètre de la conique U.

La courbe enveloppe est donc de la troisième classe, et il est évident qu'elle est touchée par les côtés et les diagonales du quadrilatère inscrit à toutes les coniques du faisceau (C). Car soient, par exemple, a et b deux côtés opposés de ce quadrilatère, le système des deux droites a, b représente une conique particulière du faisceau (C), dont les cordes communes avec U sont ces droites elles-mêmes.

II. — *Si la conique* U *passe par l'un* a *des sommets du quadrilatère inscrit aux coniques* (C), *la courbe enveloppe des cordes communes se décompose en deux parties, savoir : le point* a *lui-même et une conique.*

En effet, quel que soit le point P, la droite Pa rencontre la conique U en un second point a', par lequel on peut toujours faire passer une conique du faisceau (C), et une seule, dont la corde commune avec U est par conséquent Paa'. Le point P étant pris d'une manière quelconque dans le plan de la figure, il s'ensuit qu'il passe, par le point a, une infinité de cordes semblables ; en d'autres termes, le point a est un point isolé de la courbe enveloppe, qui se réduit ainsi à une courbe de seconde classe, c'est-à-dire à une conique, si l'on fait abstraction de ce point isolé.

III. — Le cas où l'on ne donne que trois coniques A, B, U rentre dans l'un des précédents ; car les deux coniques A, B, par exemple, peuvent être regardées comme faisant partie du faisceau (C) qu'elles déterminent. On a donc une démonstration très-simple des théorèmes proposés sous les n°s 679 et 678, et il est aisé de voir que celui du n° 677 est une conséquence immédiate de ce dernier.

IV. — C'est également sur le théorème II que repose la solution du problème proposé sous le n° 317; d'où l'on voit que ce problème n'admet que deux solutions, ainsi que je l'avais annoncé.

Quant au théorème I, il est un cas particulier de cet autre, plus général, que j'ai donné, pour la première fois, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques*, t. VI, 2ᵉ série, et dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, savoir :

L'enveloppe des cordes communes à une courbe fixe du degré n, et à un faisceau de courbes du degré m, est une courbe de la classe $\frac{1}{2} m(m-1)(2n-1)$.

J'ai fait voir au même endroit de combien d'unités cette classe s'abaisse, quand la courbe fixe passe par un ou plusieurs des points fondamentaux qui forment la base du faisceau.

Question 497 (*seconde solution*);

PAR M. N.,
Élève de Mathématiques spéciales.

Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe.

(MOUTARD.)

On peut toujours trouver sur l'axe de révolution un point tel, que les tangentes menées de ce point à la courbe soient également inclinées sur cet axe. Je prends le point pour origine, pour plan des zx le plan de la courbe, et pour axe des z l'axe de rotation. (Les axes des coordonnées sont rectangulaires.)

Les équations de l'ellipse sont

$$a^2 x^2 - b^2 z^2 - (a' x + b' z + c')^2 = 0, \quad y = 0.$$

L'équation de la surface engendrée est

$$a^2 (x^2 + y^2) - b^2 z^2 - \left(a' \sqrt{x^2 + y^2} + b' z + c'\right)^2 = 0.$$

Le plan doublement tangent $ax - bz = 0$ est tout à fait quelconque, car je pourrais faire tourner les axes autour de l'axe des z.

L'équation de la projection de l'intersection de ce plan avec la surface sur le plan des xy sera

$$(1) \qquad a^2 y^2 - \left(a' \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{ab'}{b} x + c'\right)^2 = 0,$$

équation que l'on peut décomposer dans les suivantes

$$a' \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{ab'}{b} x + c' - ay = 0,$$

$$a' \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{ab'}{b} x + c' + ay = 0,$$

ou

$$a'^2 (x^2 + y^2) = \left(a' y - \frac{ab'}{b} x - c'\right)^2,$$

$$a' (x^2 + y^2) = \left(ay + \frac{ab'}{b} x + c'\right)^2;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Question 657;

PAR M. E. M.,
Professeur à Paris.

THÉORÈME. — *Si l'équation*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Dx^p + Fx^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-3} + \ldots + U = 0$$

a toutes ses racines réelles, les coefficients D, E, F, G, *de quatre termes consécutifs vérifient l'inégalité*

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

(Catalan.)

On trouve dans l'Algèbre de Bertrand l'énoncé suivant :

Si l'équation ci-dessus a ses racines réelles, $E^2 - DF$ et $F^2 - EG$ sont de même signe.

Les deux théorèmes se démontrent simultanément.

En effet, si l'on multiplie le premier membre de l'équation par $x - a$, on trouve

$$\ldots + \begin{array}{c} E \\ - Da \end{array} \Bigg| \, x^p + \begin{array}{c} F \\ - Ea \end{array} \Bigg| \, x^{p-1} + \begin{array}{c} G \\ - Fa \end{array} \Bigg| \, x^{p-2} + \ldots$$

et l'on ne doit pas pouvoir disposer de a de telle sorte que les trois coefficients calculés soient en progression géométrique. Donc l'équation en a

$$(F - Ea)^2 = (E - Da)(G - Fa)$$

doit avoir ses racines imaginaires.

Or cette équation développée devient

$$(E^2 - DF)a^2 + (DG - EF)a + F^2 - EG = 0.$$

Donc :

1° Les coefficients extrêmes doivent être de même signe : c'est le théorème de Bertrand ;

2° On doit avoir

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0 :$$

c'est celui de Catalan.

Les corollaires indiqués pour ce dernier sont évidents.

Note. — C'est par inadvertance que nous avons inséré le théorème donné par M. E. M. comme une généralisation de la question 671 (*voir* 2e série, t. II, p. 543). Ce théorème n'est vrai que si le point A est un ombilic.

SUR LE LIEU DES INTERSECTIONS DE DEUX COURBES MOBILES ;

PAR M. NICOLAÏDÈS.

M. Van der Mensbrugghe a publié dernièrement dans *les Mondes* un extrait d'un Mémoire qui a été présenté à l'Académie royale de Belgique. Le but principal de ce Mémoire est de déterminer l'équation de la courbe, lieu des intersections successives de deux courbes planes, tournant, dans un même plan ou des plans parallèles, autour de deux centres fixes. Cette question importante a été étudiée par M. Le François dans le cas, très-restreint, où les rapports des vitesses de deux lignes tournantes est un nombre entier. Je vais dire ici en quelques lignes comment on peut traiter la question dans le cas où les lignes se meuvent d'une manière quelconque dans un même plan.

Soient

$$(1) \qquad \Phi(x', y') = 0, \quad \Phi_1(x'', y'') = 0$$

les équations de ces courbes; imprimons à chacune d'elles un mouvement quelconque, en faisant suivre ces mouvements par les axes auxquels ces courbes sont rapportées; on aura deux groupes d'équations que voici :

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, & F_1(a, b, \alpha) = 0, \\ y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, & F_2(a, b, \alpha) = 0, \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{ll} x = a' + x'' \cos\alpha' - y'' \sin\alpha' & {}_1F(a', b', \alpha') = 0, \\ y = b' + x'' \sin\alpha' + y'' \cos\alpha' & {}_2F(a', b', \alpha') = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ajoute à ces équations une dernière :

$$(4) \qquad f(a, b, a', b', \alpha, \alpha') = 0,$$

pour établir une dépendance entre les deux mouvements, on aura onze équations entre les douze variables

$$x,\ y,\ x',\ y',\ x'',\ y'',\quad a,\ b,\ a',\ b',\quad \alpha,\ \alpha'.$$

Éliminant les dix dernières, on trouvera une relation entre x, y, qui sera précisément l'équation du lieu cherché. Toute la difficulté se réduit donc à trouver les conditions de deux mouvements, et à une élimination. Voici un exemple :

Les équations de deux lignes tournantes sont

$$(5) \qquad x' = 0, \quad x'' = 0,$$

et elles se meuvent sur les plans d'une bielle de longueur B et d'une manivelle de longueur M. Je prends pour origines mobiles le centre de rotation de la manivelle et le point qui décrit une ligne droite pendant le mouvement.

Les équations (2), (3), (4) se réduisent ainsi aux six suivantes :

$$(6) \left\{ \begin{array}{ll} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, & y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \\ x = a + x'' \cos\alpha' - y'' \sin\alpha', & y = x'' \sin\alpha' + y'' \cos\alpha', \\ (a - \mathrm{B}\cos\alpha')^2 + \mathrm{B}^2 \sin^2\alpha' = \mathrm{M}^2, & \mathrm{M}\sin\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha' = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de x', x'', y', y'', α, α', a entre les équations (5), (6) s'effectue sans difficulté ; on trouve

$$x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\mathrm{M}xy\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\mathrm{B}^2(x^2+y^2) - \mathrm{M}^2x^2}} - \sqrt{\mathrm{B}^2(x^2+y^2) - \mathrm{M}^2x^2} = \mathrm{M}y.$$

Cette courbe ne présente pas de grandes particularités ; mais si l'on fait

$$\mathrm{M} = \mathrm{B},$$

cas qui correspond au système, bien connu, de Lahire,

on trouve

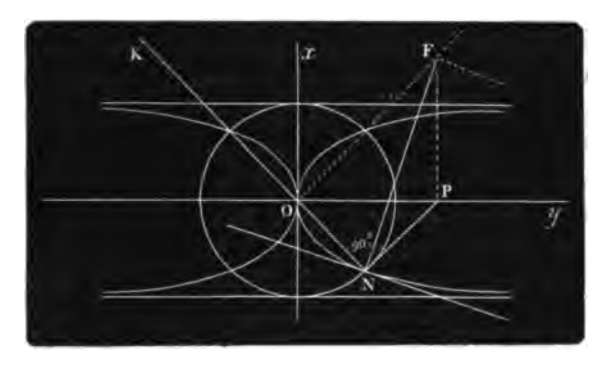
$$x^2(x^2+y^2)=M^2y^2,$$

et passant aux coordonnées polaires,

$$r=M \operatorname{tang} \theta.$$

La figure représente cette courbe. On démontrera sans difficulté qu'elle a deux asymptotes parallèles, et à une distance de l'origine égale à M; l'aire comprise entre la courbe et les deux asymptotes est égale au cercle de rayon M.

La longueur PN est constante et égale à M; cette dernière propriété permet de tracer la courbe, par un mouvement continu, au moyen du papier transparent, car le côté KN de l'angle KNP passe constamment par un point fixe O, et le point P, de l'autre côté de cet angle, parcourt la ligne Oy : ce mouvement est l'*inverse* de celui qu'on emploie pour le tracé de la *conchoïde*. La courbe en question est un cas particulier de la courbe de séparation d'ombre et de lumière, dans l'épure de la vis à filets triangulaires.



La tangente et le rayon de courbure au point N ont été tracés par les méthodes de MM. Chasles et Bresse.

BIBLIOGRAPHIE.

MAXIMILIEN MARIE. — *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.*

M. Marie a publié sous ce titre, de 1858 à 1863, dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, une série de Mémoires dont nous allons essayer de faire l'analyse.

Ces Mémoires n'ont pas précisément pour objet d'établir une *nouvelle théorie* des imaginaires, comme on pourrait le croire (l'auteur n'y émet aucune opinion sur la métaphysique de ces quantités), mais bien une *nouvelle méthode* pour l'étude des fonctions de variables imaginaires.

Tous nos lecteurs savent que l'on représente très-commodément une quantité de la forme $a + b\sqrt{-1}$, soit par une droite inclinée allant de l'origine des coordonnées au point dont les coordonnées sont a et b, ainsi que le faisaient MM. Faure, Mourey, Argant, etc.; soit, chose moins logique, par ce point même, comme Cauchy et ses disciples, et que, grâce à cette représentation, on démontre très-facilement et on ramène à des intuitions géométriques la plupart des théorèmes d'Algèbre sur les imaginaires, les propriétés des fonctions simplement et doublement périodiques, les intégrales par des chemins imaginaires, etc.

La méthode de M. Marie a également pour but de faciliter l'étude des propriétés des fonctions de variables imaginaires, en ramenant ces propriétés à des intuitions géométriques, mais elle diffère totalement par les moyens de celle de Cauchy.

Laquelle de ces deux méthodes faut-il préférer? Toutes

les deux, à tour de rôle. Chacune a ses avantages particuliers, et celui qui dédaignerait l'une ou l'autre se priverait d'un instrument utile.

M. Marie a eu pour but principal de trouver une représentation géométrique complète de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

La courbe définie par cette équation n'en représentant que les solutions réelles, ne fournit aucun secours pour l'étude des solutions imaginaires.

Pour remédier à cette insuffisance, concevons que l'on ait construit d'abord la courbe réelle dont l'équation est

$$f(x, y) = 0,$$

et que celle-ci n'ait pas de point correspondant à l'abscisse $x = a$, mais que l'équation soit vérifiée alors en faisant $y = a' + b'\sqrt{-1}$, et construisons le point dont l'abscisse est a et l'ordonnée $a' + b'$. Le lieu de tous ces points formera une courbe que M. Marie appelle une *conjuguée imaginaire* du lieu $f(x, y) = 0$. En changeant la direction des axes ou seulement celle de l'axe des y, on obtiendra une infinité de conjuguées. L'ensemble de toutes ces courbes donnera une représentation graphique complète de l'équation. Chaque conjuguée sera déterminée quand on connaîtra le coefficient angulaire de la direction qu'il faut donner à l'axe des y pour l'obtenir. Ce coefficient angulaire est nommé la *caractéristique* de la conjuguée.

M. Poncelet avait déjà considéré dès 1822 ces courbes conjuguées dans son excellent *Traité des propriétés projectives*, mais pour les sections coniques seulement. Il les nommait courbes supplémentaires. Elle lui ont été d'un grand secours, car il n'aurait pu sans elles donner

à un système de Géométrie supérieure une extension correspondant à celle de la Géométrie analytique. Tous les éléments d'une courbe qui deviennent imaginaires, tels que tangentes, polaires, asymptotes, se retrouvent à l'état réel dans les courbes supplémentaires.

Les conjuguées peuvent être définies d'une manière plus algébrique, sans recourir à la transformation des coordonnées. Soit

$$x = a + b\sqrt{-1}, \quad y = a' + b'\sqrt{-1},$$

une solution imaginaire de l'équation; construisons le point

$$x_1 = a + b, \quad y_1 = a' + b'.$$

L'ensemble de tous les points ainsi obtenus pour lesquels le rapport $\frac{b'}{b}$ a une même valeur C constitue précisément la conjuguée de caractéristique C. C'est à cette seconde définition que s'en tient M. Marie; nous n'avons reproduit la première que parce qu'elle donne une idée plus claire de la génération de ces courbes.

Sans nous étendre sur l'étude géométrique des conjuguées, nous énoncerons seulement quelques remarques et théorèmes qui les concernent.

Une équation du premier degré à coefficients imaginaires représente une infinité de droites.

La tangente au point imaginaire x, y est donnée par la même équation que la tangente au lieu réel, pourvu que l'on prenne parmi l'infinité de droites représentées par l'équation de la tangente imaginaire celle dont la caractéristique est égale à la caractéristique du point.

De même, l'équation de l'asymptote représente le faisceau des asymptotes à toutes les conjuguées.

La courbe réelle est une enveloppe de ses conjuguées.

L'enveloppe totale des conjuguées se compose de toutes les solutions de l'équation pour lesquelles $\frac{dy}{dx}$ est réel.

Les conjuguées, au point où elles touchent la courbe réelle, ont la même courbure que celle-ci, mais dirigée en sens contraire.

Ce que nous venons de dire des équations à deux variables s'étend sans peine aux équations à trois variables. Chacune d'elles représente, outre la surface réelle, une infinité de surfaces imaginaires dont chacune est déterminée par *deux* caractéristiques. On peut utilement étendre le même langage aux hypersurfaces, c'est-à-dire aux équations à plus de trois variables.

N. LANDUR.

(*La suite prochainement.*)

BULLETIN.

I.

ANGELO FORTI, professeur d'Algèbre et de Trigonométrie au lycée royal de Pise. — Tavole... *Tables des logarithmes des fonctions circulaires et des fonctions hyperboliques;* précédées d'une *Instruction sur la construction et l'usage de ces tables*, par M. le professeur et commandeur *Mossoti*, sénateur du royaume d'Italie. Pise, typographie Nistri, 1863. Un beau volume in-4 de 266 pages. Prix : 8 francs.

Ces tables peuvent se partager en deux parties. Dans la première, les fonctions circulaires sont placées sur le verso de la page dans l'ordre suivant : sinus, tangente, cotangente, cosinus; et, en regard, sur le recto de la page suivante, les fonctions hy-

perboliques. L'argument commun est l'angle φ formé par un rayon vecteur avec l'axe transverse d'une hyperbole équilatère.

Voici comment est disposé le recto d'une page.

4° 30′

M	ang. tras. τ	D	cos h	D	sin h	D	2 sett h	D
30′	4°.30′.50″		0,00135		8,89733		8,89689	
		1,1		1		162		162
31	4.31.51		0,00136		8,89895		8,89851	
		1,0		1		162		161
32	4.32.51		0,00137		8,90057		8,90012	
		1,1		1		161		161
33	4.33.52		0,00138		8,90218		8,90173	
		1,0		1		161		160
34	4.34.52		0,00139		8,90379		8,90333	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
60	5.01.09	1,1	0,00167	1	8,94362	147	8,94307	147
M	sin τ = tang		séc τ = tang h		tang τ = sin h		tang h = tang	

4° 30′

Si l'on imagine un cercle et une hyperbole équilatère concentrique, représentés par les équations

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1,$$

une droite menée sur l'origine et faisant avec l'axe des x un angle φ coupera le cercle en un point dont les coordonnées seront le sinus et le cosinus circulaires de l'angle φ, et l'hyperbole en un autre point dont les coordonnées seront le sinus et le cosinus hyperboliques du même angle. L'angle transcendant (*angolo trascendente*) τ est celui dont le sinus est égal à tang φ. Enfin la droite menée par l'origine forme avec l'arc d'hyperbole un secteur (*settore*) dont le double est désigné par 2 sett h.

La seconde table a pour argument la moitié de l'angle transcendant et donne le double secteur correspondant, ainsi que le logarithme de log tang φ. Chaque page est divisée en deux colonnes. Voici la disposition de l'une d'elles :

$\frac{1}{2}\tau = 4^{\circ}$

M	2 setth	D	log tang φ	
0'	0,14008	59	9,14356	179
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	0,14655	59	6,16289	171
12	0,14714	58	9,16460	171
13	0,14772		9,16031	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	0,15773	59	9,19433	160
M	2 setth	D	log sin τ	D

Gudermann avait déjà donné des tables de fonctions hyperboliques, mais elles sont d'un usage moins commode que celles de M. Forti. Il est juste de remercier M. Forti pour le dévonement dont il a fait preuve en se livrant à un si pénible travail.

II.

PAINVIN, professeur à Douai. — *Propriétés des points d'inflexion des courbes du troisième ordre et des points de rebroussement des courbes de troisième classe*. In-8 de 44 pages. Lille, 1863. (Extrait des *Mémoires de la Société de Lille*.)

Étude des points d'inflexion au moyen des coordonnées triangulaires, étude des points de rebroussement au moyen des coordonnées dites tangentielles. Correspondance entre les propriétés des points d'inflexion et celles des points de rebroussement prouvée par des démonstrations identiques dans les deux cas.

CORRESPONDANCE.

Lettre adressée à M. Gerono.

« Monsieur,

» Les solutions des questions posées dans les *Annales* de novembre sur les triangles circonscrits aux coniques ont été trouvées en 1813 par le général Poncelet. (Voir *Applications de Géométrie et d'Analyse*, par M. J. Poncelet, annotées par l'auteur et suivies d'*Additions* par MM. Mannheim et Moutard (*), p. 137, en bas de la page.)

» Recevez, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

» Un de vos lecteurs. »

Je remercie l'auteur de cette lettre du renseignement qu'il me transmet et de l'occasion qu'il me procure d'exprimer la haute estime que j'ai pour les travaux du géomètre que la lettre concerne. G.

Avis.

Afin d'éviter tout retard dans la réception des lettres qui me sont adressées, je préviens : 1° que je ne suis pas professeur à l'Institution Sainte-Barbe; 2° que je ne demeure plus rue d'Enfer, mais rue de la Vieille-Estrapade, 11. G.

(*) Paris, 1862. L'un des théorèmes énoncés à la fin de la page 137 est le suivant :

Quand les côtés de deux triangles quelconques s'entrecoupent sur le périmètre d'une conique, les trois lignes droites qui joignent leurs sommets respectivement opposés convergent en un même point.

Le second théorème énoncé est le corrélatif du premier. Il serait intéressant de montrer quelle liaison existe entre ces théorèmes et ceux qui font l'objet des questions 677, 678 et 679. P.

NOTE SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. PAUL SERRET.

Par les extrémités d'une corde fixe *ab* d'une conique donnée C (ou par les extrémités de l'une quelconque des cordes parallèles à celle-là) l'on fait passer une série de coniques Γ homothétiques entre elles; et, menant deux tangentes communes à chacune de ces coniques et à la conique donnée, on demande le lieu décrit par le point de concours de ces tangentes.

Ce problème, qui, abordé de la manière la plus naturelle, donnerait lieu sans doute à une élimination plus que laborieuse, a été résolu très-simplement par MM. les professeurs Mister et Neuberg (novembre 1863, p. 481, *Nouvelles Annales*). On peut toutefois, en conservant leur méthode, qui est parfaite, modifier avec avantage le calcul dans lequel ils l'ont développée; et montrer, dans une notation plus symétrique, en même temps que la solution de la question générale, un exemple de l'utilité que l'on trouve souvent à ne développer pas, dès le commencement, les diverses fonctions qui entrent dans un calcul, et à les retenir, au contraire, jusqu'à la fin, sous leur forme la plus concise.

La courbe fixe donnée et l'une des courbes homothétiques variables ayant, en général, un système de diamètres conjugués de mêmes directions, nous supposerons les axes parallèles à ces diamètres; et en désignant par

$$(o)\qquad Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

la courbe donnée, nous poserons

$$Ax^2 + Cy^2 + \ldots = \varphi, \qquad Ax_0^2 + Cy_0^2 + \ldots = \varphi_0;$$
$$Ax + D = X, \qquad Cy + E = Y;$$
$$Ax_0 + D = X_0, \qquad Cy_0 + E = Y_0;$$
$$X_0 x + Y_0 y + (Dx_0 + Ey_0 + F) = P:$$

cette dernière fonction, égalée à zéro, représentant la polaire du point (x_0, y_0) par rapport à la courbe (o).

Ces notations posées, le système des deux tangentes menées, d'un point (x_0, y_0) du lieu, à la courbe donnée, ayant pour équation

$$\varphi . \varphi_0 - P^2 = 0,$$

une conique quelconque, inscrite dans l'angle de ces deux tangentes, est, avec trois paramètres variables α, β, γ,

(1) $$\varphi . \varphi_0 - P^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0;$$

et si l'on retranche de cette équation l'équation (o) multipliée par φ_0, il vient

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 - P^2 = 0,$$

ou

(2) $$(\alpha \pm X_0) x + (\beta \pm Y_0) y + (\gamma \pm Dx_0 \pm Ey_0 \pm F) = 0,$$

équation d'un système de cordes communes aux courbes (o) et (1).

Il reste maintenant à exprimer que la courbe (1) est homothétique à une courbe donnée, telle que

(3) $$A'x^2 + C'y^2 + D'x + \ldots = 0,$$

et que l'une des cordes (2) est donnée de position, ou de direction seulement.

Or l'équation (1), partiellement développée, est

$$x^2(\alpha^2 - X_0^2 + A\varphi_0) + y^2(\beta^2 - Y_0^2 + C\varphi_0)$$
$$+ 2xy(\alpha\beta - X_0Y_0) + \ldots = 0;$$

et l'on a, dès lors, entre les deux premiers des trois paramètres variables α, β, γ, les deux relations

$$\text{(I)} \qquad \alpha\beta = X_0Y_0,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\alpha^2 - X_0^2 + A\varphi_0}{A'} = \frac{\beta^2 - Y_0^2 + C\varphi_0}{C'}.$$

L'une des droites (2) doit coïncider avec la corde donnée ab, $mx + ny + p = 0$; l'on a donc, en outre,

$$\frac{\alpha \pm X_0}{m} = \frac{\beta \pm Y_0}{n} = \frac{\gamma \pm Dx_0 \pm Ey_0 \pm F}{p};$$

ou seulement, puisque le paramètre γ n'entre pas dans les relations (I) et (II),

$$\text{(III)} \qquad \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} = \mp\left(\frac{X_0}{m} - \frac{Y_0}{n}\right):$$

et il ne reste plus qu'à éliminer α et β entre les équations (I), (II) et (III).

Or, de cette dernière élevée au carré et simplifiée par l'emploi de la relation (I), il résulte

$$\frac{\alpha^2}{m^2} + \frac{\beta^2}{n^2} = \frac{X_0^2}{m^2} + \frac{Y_0^2}{n^2},$$

ou

$$\text{(III')} \qquad \frac{\alpha^2 - X_0^2}{m^2} + \frac{\beta^2 - Y_0^2}{n^2} = 0.$$

Les équations (II) et (III') sont maintenant du premier degré en $\alpha^2 - X_0^2$, $\beta^2 - Y_0^2$; elles donnent

$$\alpha^2 - X_0^2 = \ldots, \quad \beta^2 - Y_0^2 = \ldots;$$

d'où

$$\alpha^2 = X_0^2 - \frac{m^2(AC' - CA')}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0, \quad \beta^2 = Y_0^2 - \frac{n^2(AC' - CA')}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0:$$

et de ces valeurs substituées dans l'équation (I), ou $\alpha^2\beta^2 = X_0^2 Y_0^2$, il résulte, en supprimant les termes + et $- X_0^2 Y_0^2$, et divisant par le *facteur en évidence* $\frac{AC' - CA'}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0$,

$$\frac{X_0^2}{m^2} - \frac{Y_0^2}{n^2} - \frac{AC' - CA'}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché. Les fonctions X_0, Y_0, φ_0 y ont la signification indiquée, et le lieu est toujours une courbe du second ordre.

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES (ANNÉE 1863);

PAR M. J. ROMAND,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Composition en Analyse appliquée.

1° *Déterminer la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur deux droites fixes et sur une circonférence de cercle qui rencontre ces deux droites.*

2° *Quelles conditions doivent remplir les deux droites fixes pour que les deux plans qui passent par chacune d'elles et par la génératrice se coupent constamment à angle droit? Déterminer dans ce cas les deux séries de sections circulaires qu'admet la surface.*

1° Soient AB, A'B' les deux droites données rencontrant en A, B la circonférence donnée O dont le rayon

sera désigné par R. Je prends $A'B'$ pour axe des z, la tangente à la circonférence en A' pour axe des y, et la direction du diamètre passant par le point A' pour axe des x.

a, b désignant les coordonnées du point A, les équations de AB seront

$$x - a = mz, \quad y - b = nz.$$

Soient

(G) $$x - \alpha = \gamma z, \quad y - \beta = \delta z$$

les équations d'une droite. Pour qu'elle rencontre $A'B'$, AB et la circonférence, les paramètres α, β, γ, δ doivent satisfaire aux équations de condition

(1) $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{\alpha - a}{\beta - b} = \frac{m - \gamma}{n - \delta},$$

(2) $$\beta^2 + \alpha^2 - 2R\alpha = 0.$$

Il suffit d'éliminer α, β, γ, δ entre ces équations et les équations (G) pour avoir celle de la surface.

Les équations (1) et (G) donnent premièrement par l'élimination de γ, δ :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\alpha - a}{\beta - b} = \frac{mz - x + a}{nz - y + b},$$

d'où

$$\alpha = x\frac{bx - ay + (an - bm)z}{bx - ay + (nx - my)z},$$

$$\beta = y\frac{bx - ay + (an - bm)z}{bx - ay + (nx - my)z}.$$

Substituant ces expressions à α, β dans l'équation (2) et remplaçant $2R$ par $\frac{a^2 + b^2}{a}$, il vient

$$a(x^2 + y^2)[bx - ay + (an - bm)z]$$
$$-(a^2 + b^2)x[bx - ay + (nx - my)z] = 0,$$

suppression faite du facteur $bx - ay + (an - bm)z$.

Cette équation du 3ᵉ degré prend la forme

$$[a(x^2+y^2) - (a^2+b^2)x](bx - ay)$$
$$+ [a(an - bm)(x^2+y^2) - (a^2+b^2)(nx - my)x]z = 0,$$

en réunissant les termes qui contiennent la variable z. Le multiplicateur de cette variable revient à

$$n(a^2y^2 - b^2x^2) + m(ay - bx)(ax - by);$$

par conséquent on arrive enfin à l'équation du second degré

$$(\text{S}) \quad ax^2 + ay + (mb - na)yz - (ma + nb)zx - (a^2+b^2)x = 0,$$

en supprimant le facteur $bx - ay$.

Le facteur $bx - ay + (an - bm)z$ donnerait un plan passant par le point A′ et la droite AB, et le facteur $bx - ay$ un plan passant par le point A et la droite A′B′; une droite qui engendrerait le premier en tournant autour de A′, ou le second en tournant autour de A, satisferait évidemment à l'énoncé.

La surface (S) ne peut être qu'une des surfaces du second ordre admettant des génératrices rectilignes (hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique, cône ou cylindre). Si elle a un centre, les coordonnées de ce point seront données par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} 2ax' - (ma + nb)z' = a^2 + b^2, \\ 2ay' + (mb - na)z' = 0, \\ (ma - nb)x' - (mb - na)y' = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ces équations est $\frac{a}{4}(m^2+n^2)(a^2+b^2)$; donc, si l'on écarte d'abord les cas particuliers

$$(m = 0, n = 0) \quad \text{et} \quad (a = 0, b = 0),$$

la surface (S) a un centre.

Des équations (4) on tire

$$x' = \frac{(mb - na)^2}{2a}.$$

Si l'on suppose $mb - na \gtrless 0$, cette valeur de x' ne rend pas nulle la partie indépendante des variables dans l'équation transformée; la surface (S) est donc un *hyperboloïde à une nappe*.

Si l'on avait $m = 0$, $n = 0$, le déterminant serait nul. Dans ce cas, où AB est parallèle à A'B', l'équation (S) se réduit à

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a} x = 0,$$

et représente le cylindre dont les génératrices parallèles aux droites données s'appuient sur la circonférence.

Pour $a = 0$, $b = 0$, ce qui rend encore le déterminant égal à zéro, il n'y a plus de relation nécessaire entre x, y, z. On voit en effet que, A étant confondu avec A', toute droite passant par le point A' rencontre les deux droites et la circonférence données.

Si l'on avait enfin $mb - na = 0$ sans que m et n ou a et b fussent nuls en même temps, il s'ensuivrait $x' = 0$ et la surface (S) serait un cône. Dans ce cas AB rencontre A'B', car l'équation de AB sur le plan xy est $\frac{x-a}{y-b} = \frac{m}{n}$ et se ramène à $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Or toute droite passant par le point de rencontre et s'appuyant sur la circonférence satisfait à l'énoncé.

2° Je prends pour axe des z l'axe de la circonférence donnée, et deux droites à angle droit dans son plan pour axes des x et des y. a, b désignant les coordonnées du point A où AB rencontre la circonférence, les équations

de AB seront

$$x - a = mz, \quad y - b = nz.$$

Si α, β désignent les coordonnées du point P où la génératrice dans une de ses positions rencontre la circonférence, le plan déterminé par P et AB sera représenté par

$$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + z = 0,$$

A, B étant donnés par les équations

$$A(a - \alpha) + B(b - \beta) = 0, \quad Am + Bn + 1 = 0.$$

L'élimination de A, B entre ces trois équations conduit à

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (b - \beta)(x - \alpha) - (a - \alpha)(y - \beta) \\ + [n(a - \alpha) - m(b - \beta)]z = 0. \end{array} \right.$$

Pour avoir l'équation du plan (P, A'B'), il suffit de remplacer dans celle-ci a, b, coordonnées de A, par a', b', coordonnées de A', et m, n, coefficients angulaires de AB, par m', n', coefficients analogues de A'B'. La condition de perpendicularité des deux plans sera donc

$$\begin{array}{l} (b - \beta)(b' - \beta) + (a - \alpha)(a' - \alpha) \\ + [n(a - \alpha) - m(b - \beta)][n'(a' - \alpha) - m'(b' - \beta)] = 0; \end{array}$$

et pour qu'ils soient toujours perpendiculaires entre eux, il faut que cette équation soit vérifiée pour toute valeur de α, eu égard à ce que $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$.

En remplaçant β par $\pm\sqrt{R^2 - \alpha^2}$, il vient

$$\begin{array}{l} [aa' + bb' + (na - mb)(n'a' - m'b') + (1 + mm')R^2] \\ - [(a + a') + n(n'a' - m'b') + n'(na - mb)]\alpha \\ + (nn' - mm')\alpha^2 \\ \mp \{[b + b' - m(n'a' - m'b') - m'(na - mb)] \\ \quad + (mn' + m'n)\alpha\}\sqrt{R^2 - \alpha^2} = 0; \end{array}$$

on doit donc avoir premièrement (*)

$$nn' - mm' = 0, \quad mn' - m'n = 0,$$

d'où

$$(m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = 0,$$

par conséquent

$$m = 0, \quad n = 0,$$

ou bien

$$m' = 0, \quad n' = 0.$$

Considérons $m' = 0$, $n' = 0$. $A'B'$ est perpendiculaire au plan de la circonférence. L'équation précédente se réduit à

$$(aa' + bb' - R^2) - (a + a')\alpha \mp (b + b')\sqrt{R^2 - \alpha^2} = 0;$$

on doit donc avoir encore

$$a' = -a, \quad b' = -b.$$

D'après cela, les conditions demandées sont :

1° Qu'une des deux droites soit perpendiculaire au plan de la circonférence ;

2° Que les deux droites passent par les extrémités d'un diamètre.

Ces conditions étant remplies par hypothèse, je fais passer l'axe des x par les points A, A', en sorte que

---

(*) Pour qu'une équation de la forme

$$C + Bx + Ax^2 \pm (N + Mx)\sqrt{R^2 - x^2} = 0$$

soit vérifiée par toute valeur de x, il faut et il suffit que les cinq coefficients A, B,... soient nuls. Cette équation rentre en effet dans

$$(A^2 + M^2)x^4 + 2(AB + MN)x^3 + (B^2 + N^2 + 2AC - M^2R^2)x^2$$
$$+ 2(BC - MNR^2)x + C^2 - N^2R^2 = 0.$$

Appliquant le principe connu, on a d'abord $A^2 + M^2 = 0$, d'où $A = 0$, $M = 0$, puis $B^2 + N^2 = 0$, d'où $B = 0$, $N = 0$, enfin $C = 0$.

$b = o$, $a = R$, $b' = o$, $a' = -R$. L'équation actuelle du plan (P, AB) se déduit de l'équation (5) en donnant à a, b les valeurs précédentes, puis celle du plan (P, A′B′) en donnant à a, b les valeurs de a', b' et en faisant $m = o$, $n = o$; il vient ainsi

$$(y - nz)\alpha - (x - mz - R)\beta = R(y - nz),$$

$$y\alpha - (x + R)\beta = -Ry,$$

d'où

$$\alpha = R \cdot \frac{nz(x + R) + myz - 2xy}{nz(x + R) - myz - 2Ry},$$

$$\beta = -\frac{2Ry(y - nz)}{nz(x + R) - myz - 2Ry}.$$

Substituant ces expressions à α, β dans l'équation $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = o$, on obtient

$$[nz(x + R) + myz - 2xy]^2$$
$$- [nz(x + R) - myz - 2Ry]^2 + 4y^2(y - nz)^2 = o,$$

dont les deux premiers termes sont le produit de $-2(x + R)(y - nz)$ par $2y(x - mz - R)$. Supprimant les facteurs y et $y - nz$ qui répondent aux plans (A, A′B′) ou zx et (A′, AB), on a enfin

$$(x - mz - R)(x + R) + y(y - nz) = o,$$

ou

$$(S') \qquad x^2 + y^2 - nyz - mzx - nRz - R^2 = o.$$

Le déterminant des équations du centre $m^2 + n^2$ n'est pas nul si m, n ne le sont pas tous deux, et la partie indépendante des variables dans l'équation transformée $-\frac{n^2 R^2}{m^2 + n^2}$ diffère de zéro si l'on n'a pas $n = o$; cette équation représente donc un *hyperboloïde à une nappe* quand n est différent de zéro.

Pour $m = 0$, $n = 0$, on a un *cylindre* dont le cercle donné est la section droite, et pour $m \gtrless 0$, $n = 0$, un *cône* dont le sommet est le point de concours de AB, A′B′.

Les sections par des plans parallèles à xy pour lesquelles on a $z = k$ sont évidemment des cercles. On sait que deux sections circulaires d'une surface du second ordre appartenant aux deux systèmes de sections de ce genre sont toujours sur une même sphère. Pour obtenir une circonférence du système qu'il s'agit encore de trouver, il suffit donc de faire passer une sphère par la circonférence donnée. En désignant par c le z de son centre, son équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz - R^2 = 0.$$

Retranchant cette équation de celle de l'hyperboloïde, on a

$$mx + ny + z - (2c + mR) = 0,$$

avec $z = 0$, qui répond à la circonférence donnée.

En attribuant à l'indéterminée c une valeur convenable, cette équation fournira tout plan perpendiculaire à AB; les deux systèmes de sections circulaires sont donc donnés par les plans perperdiculaires à A′B′ et par les plans perpendiculaires à AB.

Le plan des parallèles à ces deux droites menées par le centre est un des plans principaux de la surface.

Note. — La même question a été résolue par M. Gustave Dubois et par M. J.-J.-A Mathieu.

QUESTIONS.

684. Dans toute parabole, la droite qui joint les milieux des rayons de courbure correspondant aux extrémi-

tés d'une corde focale quelconque passe par le foyer et par le pôle de la corde focale.

A cette propriété descriptive correspond la relation métrique

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}},$$

R, R' étant les rayons de courbure et p le paramètre.

685. Une courbe quelconque A est située dans le plan d'une parabole. On lui mène une tangente mobile qui coupe la parabole en deux points. On projette les centres de courbure en ces points respectivement sur les rayons focaux qui y aboutissent.

La droite qui joint ces projections enveloppe une courbe symétrique de A par rapport au foyer.

Examiner le cas particulier où la courbe A se réduit à un point et celui où elle s'éloigne à l'infini.

686. Si dans une ellipse deux cordes supplémentaires variables passent par les extrémités d'un diamètre donné, et que, par un point fixe pris sur l'ellipse, on mène des parallèles à ces cordes, la diagonale libre du parallélogramme qu'elles forment avec elles passe par un point fixe.

La connaissance de ce point, d'ailleurs facile à déterminer, permet de construire à la fois les points, et la tangente en ces points, d'une ellipse donnée par son centre et par trois points.

687. Lorsque le sommet d'un angle, dont les côtés restent parallèles à eux-mêmes, décrit une conique, la corde sous-tendue par l'angle enveloppe une seconde conique asymptotique à la première.

Cette proposition permet de résoudre aisément le pro-

blème de l'*inscription dans une conique donnée d'un triangle dont les côtés soient parallèles à des directions données*.

688. Par un point quelconque M, pris sur une ellipse, on mène la normale qui rencontre les axes en P et Q.

Sur le prolongement de la normale on prend MP'=MP; sur P'Q comme diamètre on décrit un cercle qui rencontre au point N la tangente conduite par le point M. Par le point N on mène une parallèle à la normale, et par le centre O une parallèle à la tangente.

Le rectangle MNM'N' *ainsi obtenu est constant et équivaut au rectangle construit sur les demi-axes.*

Nota. — On déduit de ce théorème la démonstration d'une construction connue des centres de courbure aux sommets d'une ellipse.

689. Étant donnés deux cercles concentriques et deux rayons quelconques, on propose de mener au cercle intérieur une tangente dont la portion comprise entre les deux rayons soit divisée en deux parties égales par le cercle extérieur.

Nota.—Toutes les questions précédentes sont proposées par M. Pigeon (Henri), élève de l'École Polytechnique.

690. Soient α, β, γ les angles qu'une droite L fait avec ses projections sur trois plans rectangulaires; Δ la distance de l'origine à la droite; a, b, c les distances de cette même origine aux projections de la droite L sur les trois plans coordonnés : on aura

$$\Delta^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

(LOBATTO.)

691. Trouver l'équation de la surface qui est le lieu

des courbes de contact des cônes ayant un point fixe pour sommet et circonscrits aux ellipsoïdes d'un système homofocal donné. (Strebor.)

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 648

(voir 1re série, t. II, p. 189);

Par MM. JAUFROID et MANSION.

On donne l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, $f(\rho, \omega) = 0$. Considérant ω comme une constante, on prend la dérivée de cette équation par rapport à ρ; on élimine ρ entre cette équation et l'équation donnée. Que représente, relativement à la courbe $f(\rho, \omega) = 0$, l'équation résultant de cette élimination? Examiner en particulier le cas où l'on donne l'équation polaire d'une circonférence ou l'équation polaire d'une conique rapportée à l'un de ses foyers; expliquer les circonstances que l'on rencontre dans ces cas particuliers et former des équations d'ordre supérieur au second qui présentent des circonstances analogues.

(Mannheim.)

La sous-normale d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires a pour expression $-\dfrac{f'_\omega}{f'_\rho}$, en désignant par f'_ρ et f'_ω respectivement les dérivées de $f(\rho, \omega)$ par rapport à ρ et à ω. Il suit de là que les points pour lesquels on a $f'_\rho = 0$ sont ceux dont la sous-normale est infinie, à moins que les valeurs qui satisfont à la fois

aux équations

$$f(\rho, \omega) = 0, \quad f'_\rho = 0,$$

ne rendent nulle f'_ω, ce que nous ne supposerons pas d'abord. Si le point de la courbe (ρ, ω) ainsi déterminé est à une distance finie, l'équation $F(\omega) = 0$ qui résulte de l'élimination de ρ représentera la tangente à la courbe menée par le pôle. Si ce point est à une distance infinie, l'équation $F(\omega) = 0$ représentera une parallèle à une asymptote menée par l'origine.

Si l'on avait en même temps $f'_\rho = 0$ et $f'_\omega = 0$, le point considéré serait un point multiple et la droite qui va du pôle à ce point serait donnée par l'une des solutions de l'équation $F(\omega) = 0$.

En résumé, l'équation

$$F(\omega) = 0$$

représente les parallèles aux asymptotes menées par l'origine, les rayons vecteurs tangents à la courbe et ceux qui passent par les points multiples.

Cercle. — Soit le cercle qui a pour rayon R et dont le centre a pour coordonnées polaires d et α. Son équation sera

$$R^2 - \rho^2 - d^2 - 2\rho d \cos(\alpha - \omega) = 0,$$

ce qui donne

$$f'_\rho = -2\rho + 2d\cos(\alpha - \omega), \quad F(\omega) = R - d\sin(\alpha - \omega);$$

l'équation $F(\omega) = 0$ donne les deux tangentes menées au cercle par le pôle, comme il est facile de s'en assurer.

Conique. — On a

$$\rho(1 + e\cos\omega) = p,$$

d'où

$$f'_\rho = 1 + e\cos\omega = F(\omega).$$

On a donc

$$\cos\omega = -\frac{1}{e}.$$

ce qui donne deux droites imaginaires pour l'ellipse, deux parallèles aux asymptotes pour l'hyperbole et l'axe dans le cas de la parabole.

L'élimination est toute faite chaque fois que l'équation de la courbe a la forme

$$\rho\varphi(\omega) + \chi(\omega) = 0.$$

Par exemple, la strophoïde

$$\rho\cos\omega - a\cos^2\omega = 0,$$

et la cissoïde de Dioclès

$$\rho\cos\omega - a\sin^2\omega = 0$$

donnent immédiatement

$$\cos\omega = 0 \text{ (*)}.$$

Question 581 (Roberts)

(voir tome XX, page 139);

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0;$$

on aura identiquement, quel que soit z,

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n) = z^n - 1,$$

et, par suite,

$$[z - (\alpha_1 - \alpha_r)][z - (\alpha_2 - \alpha_r)]\ldots[z - (\alpha_n - \alpha_r)] = (z + \alpha_r)^n - 1,$$

(*) La même question a été résolue par MM. Léon Dyrion et de Marsilly.

équation dont le premier membre contient le facteur z. Ainsi l'équation

$$(2)\quad \frac{(z+\alpha_1)^n - 1}{z}\cdot\frac{(z+\alpha_2)^n - 1}{z}\cdots\frac{(z+\alpha_n)^n - 1}{z} = 0,$$

du degré $n(n-1)$ en z, aura pour racines les $n(n-1)$ différences simples $\alpha_r - \alpha_s$ entre les racines de l'équation (1), et comme ces différences sont deux à deux égales et de signes contraires, le développement du premier membre de l'équation (2) ne contiendra que des puissances paires de z.

Maintenant, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} = (n)_m,$$

on a, à cause de $\alpha_r^n = 1$,

$$\frac{(z+\alpha_r)^n - 1}{z} = z^{n-1} + (n)_1 z^{n-2}\alpha_r + (n)_2 z^{n-3}\alpha_r^2 + \ldots + (n)_{n-1}\alpha_r^{n-1}.$$

Donc si l'on pose

$$y = z^{n-1} + (n)_1 z^{n-2} x + (n)_2 z^{n-3} x^2 + \ldots + (n)_{n-1} x^{n-1},$$

le premier membre de l'équation (1) équivaudra au produit des n valeurs de y correspondant aux valeurs α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de x, et l'équation (2) elle-même pourra s'obtenir en éliminant x entre les deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} z^{n-1} + (n)_1 z^{n-2} x + (n)_2 z^{n-3} x^2 + \ldots + (n)_{n-1} x^{n-1} = 0, \\ x^n - 1 = 0. \end{cases}$$

Pour opérer cette élimination, multiplions successivement par x, $x^2, \ldots, x^{n-1}$ la première des deux équations précédentes, en observant que d'après la seconde de ces équations on a

$$x^{n+i} = x^i.$$

Ordonnant par rapport à x les $n-1$ équations résultantes, on obtient le système suivant :

$$\begin{array}{l}
(n)_{n-1} + z^{n-1}x + (n)_1 z^{n-2}x^2 + \ldots + (n)_{n-2}z\,x^{n-1} = 0,\\
(n)_{n-2}z + (n)_{n-1}x + z^{n-1}x^2 + \ldots + (n)_{n-3}z^2x^{n-1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n)_1 z^{n-2} + (n)_2 z^{n-3}x + (n)_3 z^{n-4}x^2 + \ldots + z^{n-1}x^{n-1} = 0;
\end{array}$$

et éliminant linéairement les $n-1$ quantités $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ au moyen de ces $n-1$ équations et de l'équation (3), on a enfin

$$(4)\quad \begin{vmatrix}
z^{n-1} & (n)_1 z^{n-2} & (n)_2 z^{n-3} \ldots (n)_{n-1}\\
(n)_{n-1} & z^{n-1} & (n)_1 z^{n-2} \ldots (n)_{n-2}z\\
(n)_{n-2}z & (n)_{n-1} & z^{n-1} \ldots (n)_{n-3}z^2\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n)_1 z^{n-2} & (n)_2 z^{n-3} & (n)_3 z^{n-4} \ldots \quad z^{n-1}
\end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant ne peut contenir, d'après ce qui a été remarqué plus haut, que des puissances paires de z; si donc on pose $z^2 = t$, on obtient une équation du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en z, dont les racines sont les carrés des différences entre les n racines de l'équation (1).

C'est ce résultat qui constitue le théorème de M. Roberts, que je me proposais de démontrer.

Questions 668 *et* 676 (Faure et Aoust)

(voir 2ᵉ série, t. II, p. 421 et 480);

Par M. H. LEMONNIER,

Professeur au lycée Saint-Louis.

Les formules signalées par M. l'abbé Aoust résultent de deux formules plus générales qu'on trouve dans le

Traité des Sections coniques du Rév. Salmon (p. 142, § 161).

Si x et y sont les coordonnées d'un point dans un système d'axes faisant entre eux l'angle θ; que X et Y en soient les coordonnées dans un système d'axes de même origine faisant l'angle θ', et qu'on ait

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

on aura

$$(1) \qquad \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C' - B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'},$$

$$(2) \qquad \frac{B'^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = \frac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\theta'}.$$

Ces formules, dont on doit au professeur Boole une démonstration très-simple et immédiate, peuvent servir à la résolution de beaucoup de questions sur les coniques. J'ai fait à cet égard, avec extension aux surfaces du second degré, un travail assez étendu qui paraîtra, je l'espère, avant peu dans ce journal.

Pour le moment, je vais me borner à déduire de ces formules celles qui sont dues à M. l'abbé Aoust.

Considérons une conique à centre qui soit rapportée à deux axes coordonnés faisant l'angle θ et ayant l'origine au centre. Désignons par r_1 et r_2 les rayons dirigés suivant les deux axes des coordonnées, et par r un autre rayon aboutissant au point (x, y) et faisant avec l'axe des x un angle ω.

Soient X et Y les coordonnées du même point quand on prend les axes de la conique pour axes coordonnés.

L'équation de la conique étant, dans le premier système,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

et, dans le second,

$$A' X^2 + C' Y^2 + F = 0,$$

on aura

$$A r_1^2 + F = 0, \quad C r_2^2 + F = 0,$$

et comme $x = \frac{r \sin(\theta - \omega)}{\sin \theta}$, $y = \frac{r \sin \omega}{\sin \theta}$,

$$r^2 [A \sin^2(\theta - \omega) + B \sin \omega \sin(\theta - \omega) + C \sin^2 \omega] + F \sin^2 \theta = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{F}{r_1^2}, \quad C = -\frac{F}{r_2^2},$$

$$B = \frac{\frac{\sin^2(\theta - \omega)}{r_1^2} + \frac{\sin^2 \omega}{r_2^2} - \frac{\sin^2 \theta}{r^2}}{\sin \omega \sin(\theta - \omega)}$$

$$= \frac{\sin(\theta - \omega)}{r_1^2 \sin \omega} + \frac{\sin \omega}{r_2^2 \sin(\theta - \omega)} - \frac{\sin^2 \theta}{r^2 \sin \omega \sin(\theta - \omega)}.$$

D'ailleurs,

$$A' = -\frac{F}{a^2}, \quad C' = -\frac{F}{b^2}.$$

Les deux relations indiquées deviennent, en les appliquant ici :

$$-\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{\sin(\theta - \omega)\cos\theta}{r_1^2 \sin \omega} - \frac{\sin \omega \cos \theta}{r_2^2 \sin(\theta - \omega)}$$
$$+ \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2 \sin \omega \sin(\theta - \omega)}$$
$$= -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sin^2 \theta,$$

$$\left[\frac{\sin(\theta - \omega)}{r_1^2 \sin \omega} + \frac{\sin \omega}{r_2^2 \sin(\theta - \omega)} - \frac{\sin^2 \theta}{r^2 \sin \omega \sin(\theta - \omega)}\right]^2 - \frac{4}{r_1^2 r_2^2}$$
$$= -\frac{4}{a^2 b^2} \sin^2 \theta.$$

La première se transforme en

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\sin\omega+\sin(\theta-\omega)\cos\theta}{\sin\omega}+\frac{1}{r_2^2}\frac{\sin(\theta-\omega)+\sin\omega\cos\theta}{\sin(\theta-\omega)}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta-\omega)}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta,$$

ou

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\sin\theta\cos(\theta-\omega)}{\sin\omega}+\frac{1}{r_2^2}\frac{\sin\theta\cos\omega}{\sin(\theta-\omega)}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta-\omega)}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta,$$

ou

$$\frac{\cos(\theta-\omega)}{\sin\omega}\cdot\frac{1}{r_1^2}+\frac{\cos\omega}{\sin(\theta-\omega)}\frac{1}{r_2^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\omega\sin(\theta-\omega)}\frac{1}{r^2}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\theta,$$

ou

$$\sin(\theta-\omega)\cos(\theta-\omega).\frac{1}{r_1^2}+\cos\omega\sin\omega.\frac{1}{r_2^2}-\sin\theta\cos\theta.\frac{1}{r^2}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\theta\sin\omega\sin(\theta-\omega);$$

c'est

$$\frac{\sin 2(\theta-\omega)}{r_1^2}+\frac{\sin 2\omega}{r_2^2}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\theta\sin\omega\sin(\theta-\omega),$$

ce qui revient à

$$\frac{\sin 2(rr_2)}{r_1^2}+\frac{\sin 2(r_1r)}{r_2^2}+\frac{\sin 2(r_2r_1)}{r^2}$$

$$=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin(r_1r_2)\sin(r_2r)\sin(rr_1),$$

première formule de M. l'abbé Aoust.

La seconde formule se transforme successivement en

$$\frac{\sin^2(\theta-\omega)}{\sin^2\omega}\frac{1}{r_1^4}+\frac{\sin^2\omega}{\sin^2(\theta-\omega)}\frac{1}{r_2^4}+\frac{\sin^4\theta}{\sin^2\omega\sin^2(\theta-\omega)}\frac{1}{r^4}$$
$$-2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\omega}\frac{1}{r_1^2r^2}-2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2(\theta-\omega)}\frac{1}{r_2^2r^2}-\frac{2}{r_1^2r_2^2}$$
$$=-\frac{4}{a^2b^2}\sin^2\theta,$$

$$\frac{2\sin^2\theta\sin^2(\theta-\omega)}{r_1^2r^2}+\frac{2\sin^2\omega\sin^2(\theta-\omega)}{r_2^2r_1^2}+\frac{2\sin^2\theta\sin^2\omega}{r^2r_2^2}$$
$$-\frac{\sin^4(\theta-\omega)}{r_1^4}-\frac{\sin^4\omega}{r_2^4}-\frac{\sin^4\theta}{r^4}$$
$$=\frac{4}{a^2b^2}\sin^2\theta\sin^2\omega\sin^2(\theta-\omega),$$

ce qui fait

$$\frac{2\sin^2(r_1r_2)\sin^2(r_2r)}{r_1^2r^2}+\frac{2\sin^2(r_2r)\sin^2(rr_1)}{r_2^2r_1^2}+\frac{2\sin^2(rr_1)\sin^2(r_1r_2)}{r^2r_2^2}$$
$$-\frac{\sin^4(rr_2)}{r_1^4}-\frac{\sin^4(r_1r)}{r_2^4}-\frac{\sin^4(r_2r_1)}{r^4}$$
$$=\frac{4}{a^2b^2}\sin^2(r_1r_2)\sin^2(r_2r)\sin^2(rr_1).$$

C'est la seconde formule de M. l'abbé Aoust.

Observations sur les questions précédentes;

PAR M. H. FAURE.

M. l'abbé Aoust a donné, dans les *Comptes rendus de l'Académie*, divers théorèmes relatifs à la courbure des surfaces. Il en déduit, comme conséquence, le théorème 676 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, qui revient à la question 668, que j'ai moi-même proposée dans ce journal. Ces théorèmes ont déjà été énoncés par moi, mais sous une forme un peu différente; voici en effet comment j'y étais parvenu.

En employant les notations de l'extrait de mon Mémoire sur les coordonnées trilinéaires, la somme des carrés des demi-axes principaux d'une conique inscrite dans un triangle est donnée par la relation

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \frac{R}{S}(\alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C).$$

Si l'on désigne par a', b', c' les demi-diamètres de la conique parallèle aux côtés du triangle, on a

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \alpha a' = \beta b' = \gamma c';$$

comme d'ailleurs

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C, \qquad \text{on aura} \qquad \frac{1}{\mathcal{A}^2} + \frac{1}{\mathcal{B}^2} = \frac{1}{2 \sin A \sin B \sin C}\left(\frac{\sin 2A}{a'^2} + \frac{\sin 2B}{b'^2} + \frac{\sin 2C}{c'^2}\right).$$

C'est le théorème que j'avais énoncé.

On a aussi la relation

$$\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 = \frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma)(-a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha - b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta - c\gamma)}{16 S^2}$$

pour exprimer le produit des carrés des demi-axes principaux d'une conique inscrite dans un triangle. Éliminant dans cette formule α, β, γ et S, comme on l'a fait ci-dessus, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{4\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2} = \frac{\left(\frac{\sin A}{a'} + \frac{\sin B}{b'} + \frac{\sin C}{c'}\right)\left(-\frac{\sin A}{a'} + \frac{\sin B}{b'} + \frac{\sin C}{c'}\right)\left(\frac{\sin A}{a'} - \frac{\sin B}{b'} + \frac{\sin C}{c'}\right)\left(\frac{\sin A}{a'} + \frac{\sin B}{b'} - \frac{\sin C}{c'}\right)}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}.$$

Question 681

(voir 2e série, t. II, p. 528);

PAR M. CH. DE SAINT-PRIX,
Élève au lycée de Lyon.

En nommant A, B, C *les trois angles d'un triangle rectiligne quelconque, on a*

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} \sin A.\sin B.\sin(A-B) \\ +\sin B.\sin C.\sin(B-C) \\ +\sin C.\sin A.\sin(C-A) \\ +\sin(A-B).\sin(B-C).\sin(C-A) \end{array}\right\} = 0,$$

et

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \text{séc}\, A & \text{séc}\, B & \text{séc}\, C \\ \text{coséc}\, A & \text{coséc}\, B & \text{coséc}\, C \end{vmatrix} = 0.$$

Je vais démontrer ces égalités pour trois angles a, b, c quelconques.

1° On connaît les formules

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

à l'aide desquelles la relation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\left(e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}\right)\left(e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(a-b)\sqrt{-1}} - e^{-(a-b)\sqrt{-1}}\right) \\ &+ \left(e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}\right)\left(e^{c\sqrt{-1}} - e^{-c\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(b-c)\sqrt{-1}} - e^{-(b-c)\sqrt{-1}}\right) \\ &+ \left(e^{c\sqrt{-1}} - e^{-c\sqrt{-1}}\right)\left(e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(c-a)\sqrt{-1}} - e^{-(c-a)\sqrt{-1}}\right) \\ &+ \left(e^{(a-b)\sqrt{-1}} - e^{-(a-b)\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(b-c)\sqrt{-1}} - e^{-(b-c)\sqrt{-1}}\right) \\ &\times \left(e^{(c-a)\sqrt{-1}} - e^{-(c-a)\sqrt{-1}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Développant et recomposant les termes deux à deux, on a

$$\begin{aligned}&\sin 2a + \sin 2(a-b) + \sin 2b\\ &-\sin 2b + \sin 2(b-c) + \sin 2c\\ &-\sin 2c + \sin 2(c-a) + \sin 2a\\ &-\sin 2(a-b) - \sin 2(b-c) + \sin 2(a-c) = 0,\end{aligned}$$

expression dans laquelle les termes se détruisent deux à deux. C. Q. F. D.

2° Le déterminant développé donne

$$\begin{aligned}&\cos a \operatorname{séc} b \operatorname{coséc} c - \cos a \operatorname{coséc} b \operatorname{séc} c + \operatorname{séc} a \operatorname{coséc} b \cos c\\ &- \operatorname{séc} a \cos b \operatorname{coséc} c + \operatorname{coséc} a \cos b \operatorname{séc} c - \cos a \operatorname{séc} b \cos c = 0,\end{aligned}$$

ou mieux

$$\frac{\cos a}{\sin c \cos b} - \frac{\cos a}{\sin b \cos c} + \frac{\cos b}{\sin a \cos c} - \frac{\cos b}{\sin c \cos a} + \frac{\cos c}{\sin b \cos a} - \frac{\cos c}{\sin a \cos b} = 0,$$

ou

$$\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0,$$

égalité qui se vérifie par le développement des sinus.

Note. — M. de Virieu a démontré la première égalité pour des angles quelconques et la seconde pour des angles dont la somme est égale à $(2n+1)\pi$. M. Alexandre Rezzonico, de Morat (Lombardie), n'a démontré les deux égalités que dans le cas où $A+B+C=180°$; MM. Cagny, de Vigneral et H. Picquet pour des angles quelconques.

Nous avons reçu également des solutions de MM. Cremona et Réalis.

M. Réalis observe que la relation (1) a lieu pour les arcs, ce qui doit être, car si l'on suppose que les angles soient remplacés par les arcs qui les mesurent, et, qu'après avoir divisé par une puissance convenable du rayon, on fasse ce rayon infini, on aura précisément la même relation entre les arcs a, b, c, $a-b$, etc. P.

Question 672

(voir 2e série, t. II, p. 422);

PAR MM. J. COURTIN ET C. GODARD,
Élèves de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Étant donnés deux ellipsoïdes concentriques semblables et semblablement placés, on mène de chaque point de la surface du plus grand des plans tangents à l'autre. Démontrer que l'enveloppe des plans des lignes de contact ainsi déterminées est un ellipsoïde semblable aux deux premiers.

Cette proposition peut s'étendre au cas de toutes les surfaces du second degré, même aux surfaces dénuées de centre dont les axes coïncident. La démonstration que nous allons en donner s'applique aux surfaces à centre : on la modifierait facilement pour celles qui n'en ont pas.

Soit

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$$

l'équation d'une surface du second degré douée de centre;

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = \lambda H,$$

celle d'une autre surface concentrique à la première, semblable et semblablement placée. On sait que l'équation du plan de la courbe de contact d'un cône issu d'un point (x, y, z) et circonscrit à une surface du second degré dont l'équation est $F(x, y, z) = 0$, se présente sous la forme

$$XF'_x + YF'_y + ZF'_z + TF'_t = 0,$$

si l'on suppose préalablement l'équation rendue homogène par l'introduction de la lettre T dont la valeur $= 1$.

Or, ce plan est celui dont il est question dans l'énoncé. Donc, si l'on nomme x', y', z' les coordonnées d'un point

de la première surface et qui par suite satisfont à la relation

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = H,$$

l'équation du plan polaire de ce point par rapport à la seconde surface sera

$$Px'x + P'y'y + P''z'z = \lambda H.$$

Or, la relation

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = H,$$

si nous posons

$$Px' = l, \quad P'y' = m, \quad P''z' = n, \quad \lambda H = p,$$

peut s'écrire

$$\frac{l^2}{P} + \frac{m^2}{P'} + \frac{n^2}{P''} = \frac{\lambda p^2}{H} \quad \text{ou bien} \quad \frac{p^2}{\frac{H}{\lambda}}.$$

Cette relation exprime que le plan

$$lx + my + nz = p$$

est tangent à la surface

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = \frac{H}{\lambda},$$

surface semblable aux précédentes et semblablement placée.

Réciproquement, si on prend les pôles de tous les plans tangents à une surface du second degré, par rapport à une surface semblablement placée et concentrique, ces pôles engendrent une surface du second degré.

De là quelques cas particuliers remarquables, mais trop connus pour qu'il soit utile d'entrer dans de plus amples détails.

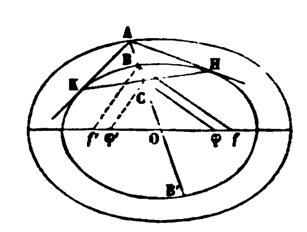
Note. — Question résolue à peu près de la même manière par MM. Mirza-Nizam, Abraham Schnée, Ch. Dupain, Grouard, élève de l'École Polytechnique, Muzeau, lieutenant d'artillerie, Grassat et Tivolier, Léon Dyrion.

Même question (solution géométrique) ;

PAR MM. DEBATISSE ET L. NOUETTE,
Élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser).

Je fais une section par un plan quelconque passant par le centre commun aux deux surfaces données. J'obtiens deux ellipses semblables et semblablement placées.

Soient A un point de la plus grande et KH la corde des



contacts des tangentes à la seconde ellipse menées par A. Je joins AO : cette droite coupe la petite ellipse en B et B' et la corde des contacts KH en C. Soient f et f' les foyers de la deuxième ellipse : je joins B, f et par C je mène une parallèle à Bf rencontrant l'axe focal en φ. On a

$$\frac{O\varphi}{Of} = \frac{C\varphi}{Bf} = \frac{OC}{OB}.$$

Or, les points A et C, B et B' étant conjugués harmoniques, on a

$$\overline{OB}^2 = OC.OA,$$

donc

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{a'}{a},$$

si a' et a sont les demi grands axes des deux ellipses. Donc Oφ est constant, et par conséquent le point φ; et

l'on a

$$C\varphi = \frac{a'}{a} Bf.$$

De même on a, en menant $C\varphi'$ parallèle à Bf',

$$C\varphi' = \frac{a'}{a} Bf'.$$

On voit aussi que le point φ' est fixe; donc

$$C\varphi + C\varphi' = \frac{a'}{a} (Bf + Bf')$$

ou

$$C\varphi + C\varphi' = \frac{2a'^2}{a};$$

donc le lieu des points C, qui n'est autre chose que l'enveloppe des cordes de contact des tangentes menées par tous les points de la première ellipse à la seconde, est une ellipse semblable aux deux premières. La surface cherchée et les deux surfaces proposées sont donc telles que, coupées par des plans quelconques passant au centre commun des deux dernières, elles donnent des ellipses semblables et semblablement placées. Elles sont donc elles-mêmes semblables et semblablement placées, et les axes de la surface cherchée sont

$$\frac{a'^2}{a}, \quad \frac{b'^2}{b} \quad \text{et} \quad \frac{c'^2}{c}.$$

Question 650 (*solution géométrique*)

(voir 2ᵉ série, t. II, p. 189 et 302);

PAR M. PAUL MANSION, DE MARCHIN.

On donne un point P *dans le plan d'une conique; on sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de*

ce point sur toutes les tangentes de la conique a un point double en P. *Démontrer que les centres de courbure correspondant à ce point double sont à égale distance du diamètre qui contient le point* P. (MANNHEIM.)

Nous démontrerons d'abord ce théorème général : *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point* P *extérieur à une courbe sur toutes les tangentes à cette courbe, a, en ce point, qui est un point multiple du lieu, ses centres de courbure au milieu des tangentes menées de ce point* P *à la courbe.*

Soient MA la tangente en un point M de la courbe donnée, PA la perpendiculaire abaissée du point P sur cette tangente. Soient Pm, Pm', Pm'', ..., les tangentes menées de P à la courbe donnée. On peut considérer l'une de ces tangentes, Pm par exemple, comme celle des positions de AM qui la première passe par P. On sait que le cercle décrit sur PM comme diamètre est tangent au lieu du point A. D'ailleurs, ce cercle coupe le lieu au point P. Lorsque la position AM de la tangente se rapproche de Pm, le point de tangence A, et le point d'intersection P du lieu et du cercle, se rapprochent également, et lorsque enfin la tangente est devenue Pm, les points A et P se confondent. Il en résulte que le cercle décrit sur Pm est le cercle osculateur du lieu au point P. Le théorème énoncé est donc démontré.

On en déduit comme corollaire le théorème proposé : soient Pm, Pm' les deux tangentes menées du point P à la conique, n et n' leurs milieux. Ces deux points sont à égale distance du diamètre qui passe par P ; en effet, nn' est parallèle à mm' qui est divisée en deux parties égales par le diamètre en question. Il en résulte le théorème.

Question 674 (*solution et généralisation*)

(voir 2e série, t. II, p. 479);

PAR M. ALEXANDRE BARRÈRE,
Élève du lycée de Lyon.

Il n'est point nécessaire, pour que la propriété annoncée ait lieu, que le triangle soit rectangle, et que le point γ soit le milieu du côté AB. On peut rectifier l'énoncé de la manière suivante :

Soient ABC *un triangle quelconque et* Cr *la perpendiculaire abaissée du sommet* C *sur le côté* AB. *Par les points* C, r, *et un point* γ *pris à volonté sur le côté* AB, *faisons passer une circonférence de cercle : soit* Cx *la tangente à cette courbe menée sur le point* C; *le produit des perpendiculaires abaissées d'un point* P *de cette circonférence sur les droites* Cγ, Cr *est égal au produit des perpendiculaires abaissées de ce même point sur le côté* BC *et sur la tangente* Cx.

La proposition ainsi énoncée n'est qu'un cas particulier d'un théorème bien connu sur le quadrilatère inscrit dans une conique, puisque la tangente peut être considérée comme le quatrième côté d'un quadrilatère inscrit dans le cercle, quadrilatère dont les autres côtés sont Cr, Cγ et $r\gamma$.

Note du Rédacteur. — L'observation de M. Barrère est fort juste, et la propriété en question n'appartient pas plus au cercle des neuf points et au triangle rectangle qu'à tout autre cercle qui passerait par le sommet C d'un triangle quelconque.

MM. A. du Mesnil, élève de Mathématiques spéciales au collége de Sorrèze (classe de M. Dumont); Dupain, professeur à Angoulême; Joseph Dupont, élève de troisième (lettres) au lycée Louis-le-Grand (classe de M. Burat); Auguste Grouard, élève de l'École Polytechnique; Morel, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand; Mirza-Nizam et Mirza-Djehan, élèves de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Amiot); Ernest Potier, élève du collége Chaptal; Beau, élève du lycée Saint-Louis, résolvent la même question par la considération des triangles semblables. Sans étendre la question, presque tous remarquent qu'elle est un cas particulier d'un théorème plus général. P.

NOTE SUR LA THÉORIE DES COURBES PODAIRES SUCCESSIVES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Je dois à une lettre obligeante de M. Prouhet la connaissance que la théorie des podaires successives d'une courbe plane (que je croyais avoir donnée le premier dans un Mémoire publié il y a assez longtemps dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. X, 1re série) est due à Maclaurin. Je m'empresse de dire que l'idée de la dérivation d'une suite de courbes d'une courbe donnée d'après cette méthode a été présentée très-explicitement par ce grand géomètre dans les *Philosophical Transactions* de l'année 1718, n° 356. Maclaurin remarque aussi que les courbes ayant pour équation polaire $r^m = a^m \cos m\omega$ fournissent l'application la plus simple de cette théorie. Il démontre que la rectification de deux courbes successives dans la suite de celles dérivées d'une primitive ayant une équation polaire de cette forme conduit à celle de toutes les podaires de la série.

Ce résultat, donné par Maclaurin il y a presque cent cinquante ans, renferme le théorème que j'ai publié dans le *Journal* de M. Liouville, t. XII, p. 448, à la fin d'un article *sur la rectification de quelques courbes,* et dont j'avais déjà donné un cas particulier dans mon travail, inséré au tome X.

Quant à mes autres recherches sur ce sujet, qui se trouvent dans le tome X, ainsi que dans le tome XII, p. 41, et le tome XIII, p. 179, les résultats que j'ai obtenus (dont quelques-uns dépendent des propriétés

assez cachées des fonctions elliptiques, découvertes par Legendre) montrent comme l'idée de Maclaurin est féconde et comme elle peut se développer avec le progrès de la science. Dans un Mémoire publié par moi dans les *Annales* de M. Tortolini, t. IV, 1861, p. 133, j'ai considéré des podaires à indices fractionnaires, tant pour le cas de courbes que pour celui de surfaces, et j'ai étudié en particulier les propriétés de la surface podaire, à indice $\frac{1}{2}$, d'un ellipsoïde rapporté au centre pour le pôle. Cette surface présente les analogies les plus frappantes avec l'ellipse de Cassini, podaire fractionnaire, à indice $\frac{1}{2}$, d'une conique à centre.

Je crois devoir mentionner, comme très-digne de l'attention des géomètres, un Mémoire de M. J.-A. Hirst sur des surfaces podaires, publié dans les *Annales* de M. Tortolini. On y trouve, parmi d'autres résultats, une expression élégante pour l'aire superficielle de la $n^{\text{ième}}$ podaire.

Note du Rédacteur. — Maclaurin a reproduit sa théorie des podaires dans sa *Géométrie organique*. Malgré cette double publication, cette découverte était restée complétement ignorée des géomètres, lorsque M. W. Roberts l'a retrouvée de son côté par une méthode qui lui est propre et en a fait d'importantes applications à la théorie des transcendantes elliptiques. Nous profitons de cette occasion pour remercier publiquement le célèbre géomètre irlandais des belles questions dont il a bien voulu enrichir les *Nouvelles Annales*, sous le pseudonyme transparent de STREBOR.

QUESTIONS D'EXAMEN (1863) (*).

Géométrie élémentaire.

1. Lieu des points d'une sphère d'où l'on voit, sous un angle droit, une droite déterminée de longueur.

(*) On se ferait une idée peu exacte des examens et de la manière dont

2. Des sommets d'un quadrilatère sphérique comme pôles, on décrit des arcs de grand cercle terminés aux côtés du quadrilatère prolongés dans le même sens. On demande l'aire totale de la figure ainsi obtenue.

3. Faire dans le tronc de pyramide une section qui soit moyenne proportionnelle entre les deux bases.

4. Les plans bissecteurs des dièdres d'un tétraèdre se coupent en un même point.

5. Les plans perpendiculaires aux arêtes d'un tétraèdre, menés par les milieux de ces arêtes, se coupent en un même point.

6. Les droites qui vont de chaque sommet d'un tétraèdre au centre de gravité de la face opposée se rencontrent en un même point.

7. Étant donnés trois points dans un plan et trois points dans un autre plan, quelle est la condition nécessaire pour que les droites qui les joignent se rencontrent en un même point?

8. Volume engendré par un triangle isocèle tournant autour d'un axe extérieur passant par son sommet.

Géométrie descriptive.

9. Une droite, assujettie à rencontrer quatre droites dans l'espace, est déterminée.

10. Projection de la bissectrice de l'angle de deux droites dont l'une est perpendiculaire au plan horizontal.

---

ils sont conduits, si l'on en jugeait par l'échantillon que nous donnons ici. D'abord nous avons laissé de côté les questions, et ce sont les plus nombreuses, qui ne font que reproduire un article du programme officiel; nous avons ensuite abrégé les énoncés, ce qui peut leur avoir fait perdre sous le rapport de la clarté. Pour bien juger d'une question d'examen, il ne faut pas la considérer isolément, mais la comparer à celles qui l'ont précédée et amenée. C'est ainsi que la question 39, très-difficile en elle-même, n'est qu'un corollaire très-simple de la question 30. P.

11. Mener par une droite donnée un plan qui coupe une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

12. On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical. Trouver les traces du plan conjugué à une droite donnée.

13. Trouver l'intersection d'un cylindre dont l'axe est dans le plan horizontal, par un plan que déterminent sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal.

14. Représenter une sphère qui a pour diamètre une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre et dont on donne les traces.

15. Intersection de deux cylindres de révolution tangents au plan horizontal.

16. Intersection de deux cônes de révolution dont l'un a son axe perpendiculaire au plan horizontal et l'autre son axe perpendiculaire au plan vertical.

17. On circonscrit à une sphère un cylindre dont les génératrices sont également inclinées sur les deux plans de projection. Trouver les projections de la courbe de contact.

18. Une circonférence est donnée dans le plan bissecteur de l'angle formé par les deux plans de projection. Construire un cône qui ait pour base cette circonférence et pour sommet un point pris dans le plan vertical. Plans tangents perpendiculaires au plan horizontal.

19. On donne un ellipsoïde dont deux plans principaux sont parallèles aux plans de projection. Trouver les traces d'un plan qui coupe l'ellipsoïde suivant un cercle.

20. Mener une droite qui rencontre deux autres droites et fasse avec ces dernières des angles égaux.

21. Intersection d'un cône et d'une sphère.

22. On coupe un cylindre vertical par un plan perpendiculaire au plan vertical. Trouver les points de la section où le plan est normal au cylindre.

Algèbre.

23. Division d'un polynôme entier par $x^2 + px + q$. Forme du reste.

24. Trouver la somme de la suite

$$q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots + nq^n.$$

25. Extraire la racine carrée d'une expression imaginaire.

26. Limite de $(\sqrt[m]{a} - 1)^m$ pour $m = \infty$.

27. Limite de $\frac{a^x - 1}{x}$ pour $x = 0$.

28. Maximum et minimum de la fraction

$$\frac{7x^2 + 8x + 1}{5x^2 + 7x + 2}.$$

29. Trouver le plus grand coefficient du développement de $(x + a)^m$.

30. Trouver l'expression de

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \ldots + \frac{1}{x - l}$$

et de

$$\frac{1}{(x - a)^2} + \frac{1}{(x - b)^2} + \ldots + \frac{1}{(x - l)^2},$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant les racines de l'équation $f(x) = 0$.

31. Dérivée de y par rapport à x, ces deux variables étant liées par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2 e^{\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}.$$

32. Démontrer que si u_n est le terme général d'une série,

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{pour } n = \infty .$$

33. Trouver deux nombres, connaissant leur somme et la somme de leurs cubes.

34. Dérivée de x^x.

35. Nombre des racines réelles de l'équation $a^x = Lx$.

36. Si le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est du $p^{ième}$ degré, l'équation $f(x) = 0$ aura $m - p$ racines distinctes.

37. Condition pour qu'une équation du quatrième degré ait une racine triple.

38. Équation qui a pour racines les sommes des racines d'une équation du troisième degré, prises deux à deux.

39. Si l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines réelles et inégales, l'équation $f'(x)^2 - f(x)f''(x)$ n'a que des racines imaginaires.

40. Décomposer $(x^2 + px + q)^2 + 1$ en facteurs réels du second degré.

41. Résoudre l'équation

$$2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0$$

et montrer qu'elle a deux racines réelles.

42. Calculer $x^m + \frac{1}{x^m}$ en fonction de $x + \frac{1}{x}$ en posant $x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi$. Expliquer pourquoi la formule à laquelle on parvient convient à tous les cas.

43. Variations de la fonction $\frac{a^2}{x}$. Combien l'équation $\frac{a^2}{x} = b$ a-t-elle de racines?

Trigonométrie.

44. Signification géométrique de la formule

$$\tang \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} C.$$

45. Rayon du cercle inscrit en fonction de celui du cercle circonscrit et du périmètre du triangle.

46. La différence des logarithmes des tangentes va-t-elle en augmentant ou en diminuant quand l'arc augmente?

47. Surface d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.

48. Calculer $\sin \frac{1}{2} a$ et $\cos \frac{1}{2} a$ en fonction de $\tang a$.

49. Résoudre un triangle, connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit. Calculer en fonction des données la surface du triangle et le rayon du cercle circonscrit.

50. Des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

déduire

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

51. Construire un triangle, connaissant un angle, la distance du pied de la hauteur correspondant à cet angle au milieu de la base, et enfin l'angle que font entre elles la hauteur et la médiane.

(*La suite prochainement.*)

BIBLIOGRAPHIE

(voir p. 42).

Maximilien Marie. — *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* (Fin.)

M. Marie a appliqué ce mode de représentation des équations à plusieurs questions, notamment à l'étude des périodes des intégrales et à celle des conditions de convergence de la série de Taylor. La méthode s'adapte tellement bien au premier de ces deux sujets, qu'elle semblerait avoir été créée exprès. Certaines intégrales ont une période réelle (celle qui exprime la surface d'un segment de cercle, par exemple), d'autres une période imaginaire $\left(\text{exemple, } \int \frac{dx}{x}\right)$, d'autres les deux espèces de périodes à la fois. L'explication des périodes réelles est très-simple : ces périodes ne sont autre chose que l'aire de la courbe fermée dont l'intégrale en question exprime la quadrature (*). La méthode de M. Marie fournit avec une égale facilité l'explication des périodes imaginaires : elles sont les aires des anneaux fermés de conjuguées compris entre deux branches de la courbe réelle, ou la somme d'un anneau de la courbe réelle et d'un anneau de la conjuguée. On obtient ainsi une méthode plus simple que toute autre pour évaluer ces périodes, et l'on constate en même temps deux théorèmes intéressants : l'un, c'est que les aires des anneaux fermés de conjuguées compris entre deux branches consécutives de la courbe réelle sont égales

(*) Les aires limitées par des branches infinies peuvent se ramener par des transformations de variables à des aires fermées.

entre elles; l'autre, c'est que les intégrales $\int y\,dx$ et $\int x\,dy$, y et x étant liés par une équation $f(x, y) = 0$, ont les mêmes périodes. Nous supposons écartées les difficultés concernant les fonctions qui ont plus de deux périodes. Ce dernier théorème a été démontré aussi, ou peu s'en faut, dans l'école de Cauchy; mais ce grand géomètre ne l'avait pas encore entrevu quand il dut faire un Rapport à l'Académie des Sciences sur les travaux de M. Marie.

Le lecteur s'apercevra, sans que nous ayons besoin de le lui faire remarquer, que cette méthode promet de grandes ressources pour l'étude des fonctions définies par des équations différentielles à deux variables, que ces fonctions soient ou non réductibles aux fonctions doublement périodiques, tandis que la méthode de Cauchy appliquée par MM. Puiseux, Briot et Bouquet ne paraît guère avoir de puissance quand il s'agit d'aborder les fonctions plus compliquées que les fonctions doublement périodiques. Enfin cette méthode permet de découvrir quelque chose concernant les périodes des intégrales doubles et multiples, sujet qui avait résisté à Cauchy. Les périodes des intégrales doubles sont des volumes réels ou imaginaires, de même que celles des intégrales simples sont des aires. Cependant une indétermination d'un autre ordre pèse sur les intégrales doubles; c'est un point pour lequel nous renvoyons au Mémoire de notre auteur et qui demande bien des éclaircissements.

La méthode de M. Marie s'applique moins heureusement à la recherche des conditions de convergence de la série de Taylor. Elle ne devient utilisable qu'au moment où celle de Cauchy cesse de l'être, et alors même elle est loin de satisfaire à toutes les exigences. Cauchy n'a en somme démontré relativement à la série de Taylor qu'une seule chose qui mérite mention : c'est que cette série est

nécessairement convergente (*) tant que la variable x, par rapport aux puissances de laquelle le développement est ordonné, conserve un module inférieur à tous ceux de certaines valeurs de x *dangereuses* ou plutôt *suspectes*; mais il ne donne aucun moyen de discerner parmi ces valeurs suspectes celles qui sont réellement dangereuses dans chaque cas déterminé, et il range même parmi les valeurs suspectes des valeurs qui ne le sont nullement. C'est ce que M. Marie fait très-bien voir, mais il n'a lui-même qu'une méthode précaire pour discerner ces valeurs dangereuses, méthode qui ne conduit à aucune règle générale certaine. M. Marie suppose cependant une règle qui se vérifie dans tous les cas particuliers, très-simples à la vérité, qu'il a examinés : de tous les points suspects le plus immédiatement dangereux serait l'un des deux points critiques dont les conjuguées comprennent entre elles le point origine où l'on a transporté les axes pour faire le développement suivant la série de Mac-Laurin. Cet énoncé convient pour le moins au cas où les points suspects appartiennent à une même branche de la courbe réelle.

Mais le problème que se propose ici M. Marie n'a peut-être pas toute l'importance que l'on croirait; la plupart du temps on pourra, quand le nombre des points suspects ne sera pas infini, les éviter tous assez simplement sans distinguer ceux qui sont réellement dangereux de ceux qui ne le sont pas (**).

(*) L'origine de ce théorème de Cauchy est dans la *Théorie des fonctions génératrices* de Laplace, ouvrage dans lequel l'expression d'un coefficient de la série de Taylor est déjà donnée en intégrale définie; il y avait peu à faire ensuite pour trouver l'expression du reste. De là une démonstration du théorème de Cauchy plus claire que toutes celles qu'il en a données. C'est ce que nous nous proposons de faire voir dans une des prochaines livraisons des *Nouvelles Annales*.

(**) Développez $f(x)$ par rapport aux puissances de $\frac{x}{x+n}$, n étant un

M. Marie considère dans le reste de sa série de Mémoires les lois qui régissent la courbure des conjuguées et de leur enveloppe, ainsi que la manière de représenter graphiquement les angles imaginaires à centre réel ou imaginaire et les triangles imaginaires. Ce sont des théories élégantes, faciles à comprendre, et qui, par cela même qu'elles sont simples, devront rencontrer des applications; mais nous ne voyons, quant à présent, aucune raison pour y insister dans ce compte rendu.

N. LANDUR.

BULLETIN.

III.

Novi (Jean), professeur d'Algèbre supérieure à l'Université de Pise. — Trattato... *Traité d'Algèbre supérieure*. Première partie. *Analyse algébrique*. In-8 de VIII-458 pages. Florence, 1863; Félix Le Monnier. Prix : 10 francs.

Voici le contenu de ce volume : — Notions sur la théorie des combinaisons. — Nombres complexes. — Limites et continuité des fonctions. — Séries. — Considérations générales sur la convergence : séries doubles : série binomiale. — Séries exponentielles et logarithmiques. — Séries circulaires et hyperboliques. — Recherches ultérieures sur les séries. — Produits infinis. — Fa-

---

paramètre à choisir après coup. Représentez, à la manière de Cauchy, toutes les valeurs critiques de x par des points du plan, et groupez ensemble, d'une part, tous ces points critiques, d'autre part le point de départ et le point d'arrivée. S'il est possible de tracer une circonférence comprenant un de ces groupes dans son intérieur et laissant l'autre à l'extérieur, on pourra choisir n de manière que la série soit convergente.

cultés analytiques. — Fractions continues. — Leur réduction en série, et réciproquement.

L'ouvrage aura trois volumes. Le second comprendra les déterminants, les fonctions symétriques, les propriétés des fonctions homogènes. Dans le troisième on traitera des fonctions irrationnelles et de tout ce qui est relatif à la résolution algébrique des équations. L'auteur se recommande de M. le professeur Betti qui a bien voulu l'aider de ses conseils et mettre à sa disposition les manuscrits des leçons faites par lui en 1858 et 1859.

IV.

Manilius (J.-J.), ingénieur des Ponts et Chaussées. — *Méthode infinitésimale sans métaphysique et indépendante de la méthode des limites*. In-8 de 16 pages et 1 planche. Gand, 1863.

Il y a des personnes qui refusent de croire que l'espace soit infiniment grand et affirment qu'il a des bornes. M. Manilius entreprend de les ramener à de meilleurs principes. Nous trouvons que M. Manilius a bien de la bonté.

V.

Société des Sciences naturelles du grand-duché de Luxembourg; t. VI, année 1863. Luxembourg, 1863; in-8 de 132 pages et 2 planches.

La partie mathématique de ce recueil comprend : — Détermination de la relation qui existe entre la chaleur rayonnante, la chaleur de conductibilité et la chaleur latente; par *M. de Colnet d'Huart*, professeur à l'Athénée. 64 pages. — Sur les courbes du second degré, par *M. J.-P. Michaelis*. 40 pages.

L'auteur du premier Mémoire annonce qu'il a démontré *rigoureusement*, par les principes de la Mécanique rationnelle, que la chaleur de conductibilité est un mouvement moléculaire. Il s'inspire des idées exposées par M. Lamé dans la *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. « C'est cet ouvrage qui nous a

tracé la voie que nous avons suivie dans ces recherches ; c'est un hommage que nous nous faisons un devoir de rendre à son illustre auteur. »

M. Michaelis prend la peine de refaire toute la théorie des coniques au moyen d'une variable auxiliaire qui est l'angle excentrique des Anglais ou l'anomalie excentrique des astronomes. M. Desboves s'en est servi pour démontrer quelques propriétés des normales aux coniques.

VI.

Picart (A.), agrégé, professeur au lycée Charlemagne, docteur ès sciences. — *Essai d'une théorie géométrique des surfaces,* thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, 1863 ; Mallet-Bachelier. In-4 de 72 pages et 1 planche.

Forme générale d'une surface autour d'un point. — Lignes tracées sur les surfaces. — Propriétés des surfaces gauches. — Surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques.

Cette dernière partie a fait l'objet d'un Mémoire présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences, le 15 février 1858. On y trouve démontrées fort simplement toutes les propriétés découvertes par MM. Serret et Bonnet dans leurs Mémoires sur la même question.

VII.

Berger, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier. — *Étude sur le développement de la fonction perturbatrice, d'après Cauchy.* Montpellier, Bœhm et fils, 1863. In-4 de 72 pages. — *Étude sur les fonctions des variables imaginaires, d'après Cauchy.* Montpellier, Bœhm et fils, 1863. In-4 de 54 pages avec 1 planche.

Dans la première thèse, M. Berger expose la méthode de Cauchy avec les éclaircissements et les développements convenables, et l'applique au calcul de l'inégalité à longue période, découverte par Airy dans le moyen mouvement de Vénus, sous

l'action perturbatrice de la Terre. — Dans la seconde thèse l'auteur donne les principes de la théorie des imaginaires de Cauchy. Le théorème sur le développement des fonctions en série a déjà été reproduit par MM. Briot et Bouquet avec d'heureux éclaircissements; cependant l'auteur a pensé que la démonstration pouvait encore être complétée, et qu'il était utile de traiter le cas des fonctions implicites. La thèse se termine par la théorie du compteur logarithmique et de ses principales conséquences.

VIII.

MOIGNO et LINDELOEF. — *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de A.-L. Cauchy.* (Tome IV, Ier fascicule, *Calcul des variations.*) In-8° de xx-352 pages. Paris, 1861 ; Mallet-Bachelier.

L'ouvrage de MM. Moigno et Lindelœf renferme, sous un petit volume, un traité complet de calcul des variations, comprenant les travaux les plus récents effectués dans cette partie de la science. Les auteurs ont évité avec soin les formules stériles, si chères aux esprits médiocres, parce que leur vaste ampleur est très-propre à cacher le vide des idées. La concision des formules a beaucoup gagné à l'emploi d'un signe inventé par Sarrus et perfectionné par Cauchy, et qui sert à indiquer une ou plusieurs substitutions faites dans une intégrale définie.

Les principes généraux occupent 197 pages et huit leçons. On y trouve la variation d'une intégrale multiple d'ordre quelconque; les maxima et minima des intégrales simples, doubles ou triples; la règle de Jacobi pour distinguer les maxima des minima dans le cas des intégrales simples. Le reste de l'ouvrage est consacré aux applications : isopérimètres, ligne géodésique, brachistochrone, surface à aire minimum, surface à aire donnée renfermant le plus grand volume.

Ces leçons font honneur à M. Lindelœf pour les méthodes dont il est l'inventeur, et à M. Moigno pour sa rédaction éminemment lucide.

IX.

PAINVIN, professeur au lycée de Douai. — *Propriétés du système des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe*. In-4° de 38 pages, 1863. (Extrait du *Journal de Crelle*, t. LXIII.)

Une surface est conjuguée par rapport à un tétraèdre fixe lorsqu'un sommet quelconque du tétraèdre est, relativement à cette surface, le pôle de la face opposée. M. Painvin démontre, au moyen des coordonnées tétraédriques (distances d'un point aux faces d'un tétraèdre dit *de référence*), vingt-huit théorèmes. Les extraits suivants donneront une idée des propriétés étudiées par M. Painvin : *Lorsque les surfaces conjuguées passent par un point fixe, les plans polaires d'un point fixe passent eux-mêmes par un même point, et les pôles d'un plan fixe appartiennent à une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre, dont les sommets sont des points doubles. — Lorsque le pôle d'un plan fixe décrit une droite fixe, les surfaces conjuguées enveloppent une surface du huitième ordre, etc.*

X.

MARIE (MAXIMILIEN), répétiteur à l'École Polytechnique. — *Leçons d'Algèbre élémentaire*. In-8° de VIII-200 pages. Paris, 1863; Mallet-Bachelier. Prix, 4 fr.

L'auteur définit l'Algèbre : *la théorie abstraite des lois*, et il éclaircit ce que cette définition elle-même a d'abstrait par des exemples empruntés à la chute des corps dans le vide et au mouvement du pendule. Le premier chapitre traite du calcul des polynômes au point de vue arithmétique, c'est-à-dire en supposant que chaque lettre représente un nombre absolu et que toutes les opérations indiquées puissent s'effectuer. Le chapitre suivant traite du calcul algébrique considéré au point de vue le plus général, de la résolution et de la discussion des équations du premier et du second degré. Dans le chapitre

sur les inégalités, l'auteur conseille de faire passer tous les termes dans un seul membre, ce qui ramène la résolution d'une inégalité à la décomposition d'un polynôme en facteur et à la recherche des valeurs qui rendent chaque facteur positif ou négatif. Le précepte est judicieux; mais nous ne voyons pas pourquoi l'auteur, sans les repousser d'une manière absolue, conseille d'éviter des formes de langage ($-3 < 0$, $-5 < -3$) amenées naturellement par un besoin de généralisation, et dont il est facile de donner une définition assez nette pour que leur emploi n'amène aucune confusion dans les idées.

Après la théorie des maxima et des minima vient un chapitre dont presque tout le contenu (développement du binôme et d'une fonction entière, relation entre les racines et les coefficients d'une équation) est attribué par l'auteur à Viète, nous ne savons d'après quels documents. Enfin le dernier chapitre est consacré à la résolution des équations binômes les plus simples et à celle des équations du troisième et du quatrième degré.

XI.

DESARGUES. — *Œuvres*, réunies et analysées par M. *Poudra*, officier supérieur d'état-major en retraite. 2 volumes in-8 de VIII-510 et 428 pages et 32 planches. Paris, 1863-1864; Leiber. — Prix : 15 francs.

Desargues, que M. Poncelet a surnommé le Monge de son siècle, peut être regardé à bon droit comme le père de la Géométrie moderne, de cette Géométrie qui se distingue de celle des anciens par la généralité de ses conceptions, le caractère presque intuitif de ses preuves et la grande fécondité de ses principes. M. Poudra rend un éminent service à l'histoire de la science et à la science elle-même, en réunissant des œuvres dont quelques-unes sont d'une excessive rareté et dont les autres sont simplement introuvables, puisque du plus remarquable ouvrage de Desargues il ne restait plus qu'une copie manuscrite, conservée aujourd'hui à la bibliothèque de l'Institut. M. Poudra ne s'est pas contenté de reproduire les œuvres de son auteur; il

les a accompagnées d'un commentaire, toutes les fois que cela est devenu nécessaire pour l'intelligence du texte. Il a recueilli jusqu'aux fragments d'ouvrages perdus, et connus seulement par les citations des détracteurs de Desargues.

Voici le contenu de ces deux volumes :

Premier volume. — Biographie de Desargues. — Perspective de 1636. — Traité des coniques (*). — Coupe des pierres. — Perspective. — Gnomonique. — Recueil de propositions diverses. — Perspective adressée aux théoriciens. — Extraits de divers écrits et affiches.

Second volume. — Analyse des ouvrages de Bosse (le disciple de Desargues). — Diverses notices sur Desargues. — Recueil et extraits de divers libelles contre Desargues (Dubreuil, Melchior Tavernier, Beaugrand et Curabelle).

La langue de Desargues est lourde, embarrassée, et semble être antérieure de deux siècles à celle de Descartes. A des constructions grammaticales d'un autre âge, elle joint un néologisme qui ajoute à son obscurité. Desargues n'a écrit que de simples brouillons, où les idées sont en abondance sans doute, mais non développées. Cela explique le rapide oubli dans lequel ses ouvrages étaient tombés, malgré les éloges de Descartes, de Pascal et de Leibniz. De là résulte pour les hommes de génie eux-mêmes la nécessité d'être clairs, car il ne peut arriver à tous, après deux siècles d'oubli, de rencontrer un commentateur intelligent et zélé, qui traduise leurs ouvrages en langue vulgaire, les édite *à ses frais* (**), et fasse briller leur gloire du plus vif éclat.

(*) Imprimé sur la copie faite par de la Hire en 1670. Il porte ce titre bizarre : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements de la rencontre d'un cône avec un plan.*

(**) M. Poudra a consacré à cette publication une somme de mille francs qu'il a reçue de l'Académie l'année dernière à titre d'encouragement; mais cette somme a été loin de couvrir tous les frais. L'ouvrage n'a été tiré qu'à trois cents exemplaires.

DE LA TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE DES FIGURES PLANES,

Et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. Le tome II (2e série) des *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne*, année 1863, contient un intéressant article de M. le professeur Cremona, relatif à la *transformation géométrique des figures planes*.

Je m'étais moi-même occupé de cette question il y a quelques années, dans un Mémoire sur la *génération de certaines courbes à double courbure*, adressé à l'Institut de France. Les *Comptes rendus* de l'année 1859, t. XLIX, p. 542, ont fait mention de cet envoi; l'objet du Mémoire s'y trouve succinctement indiqué dans une Note d'où j'extrais le passage suivant :

« Ce Mémoire est précédé d'une introduction où je » cherche à préciser l'état de la question : il se divise en » deux parties.

» Dans la première partie je présente, sous plusieurs » points de vue, la théorie de figures correspondantes » d'un nouveau genre tracées sur le plan, où des points » correspondent à des points et des droites à des courbes » de l'ordre n, douées d'un point multiple de l'ordre » $(n-1)$ qui leur est commun à toutes. Cette théorie » me paraît offrir quelque intérêt par elle-même; mais » elle en acquiert aussi par l'application que j'en fais à la » construction des courbes à double courbure. Ce sont,

» en effet, les points homologues de ces figures, désignées
» par moi sous le nom de *figures isographiques*, qui
» servent à guider les rayons vecteurs rectilignes, au
» moyen desquels s'engendre la courbe à double cour-
» bure de l'ordre $(n+2)$. Cette application fait le
» sujet de la seconde partie du Mémoire. J'explique
» comment on peut construire ainsi une courbe à double
» courbure d'un degré quelconque, et je termine en in-
» diquant le moyen d'obtenir la tangente en un point
» quelconque de la courbe. » (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 542.)

Les résultats auxquels j'étais parvenu dans ce Mémoire inédit concordent, à plusieurs égards, avec ceux que M. Cremona vient de publier. Cependant nos points de départ, nos conséquences et nos procédés de démonstration étant très-différents, j'ai pensé que la publication de la première partie de mon travail, bien que tardive, offrait une certaine opportunité, et ne serait pas sans intérêt pour les géomètres.

Tel est l'objet du présent article.

2. Supposons qu'on ait, sur un plan, un réseau de courbes du degré n, ayant toutes en commun $2n-2$ points simples, et un autre point O, qui soit, sur chacune d'elles, multiple de l'ordre $n-1$. Ce point multiple équivaut, comme on sait, quant à la détermination de chaque courbe, à $\frac{1}{2}n(n-1)$ points simples. Donc chacune des courbes du réseau est assujettie, par équivalence, à passer par

$$\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)=\frac{1}{2}n(n+3)-2$$

points donnés, c'est-à-dire par autant de points moins deux qu'il en faut pour déterminer une courbe du de-

gré n. Ces $2n-1$ *points fondamentaux*, dont l'un est de l'ordre $n-1$, forment la *base* (B) du réseau.

3. Deux courbes du réseau ne se coupent qu'en un seul point autre que les points fondamentaux; car ceux-ci équivalent à $\overline{n-1}^2 + 2(n-1) = n^2 - 1$ intersections. Toutes les courbes qui passent par un même point forment un faisceau.

Une droite quelconque, menée par le point fondamental multiple O, ne coupe l'une quelconque des courbes C^n qu'en un seul point. Réciproquement, un point i de cette courbe ne donne lieu qu'à un seul rayon Oi. D'après cela, on peut appeler *rapport anharmonique* de quatre points pris sur une courbe C^n à point multiple de l'ordre $n-1$, le rapport anharmonique des quatre droites qui les joignent au point multiple. On saura donc ce qu'il faut entendre par cette expression, dont M. Chasles fait usage depuis longtemps dans la théorie des coniques, savoir : *divisions homographiques correspondantes sur une droite et sur une courbe*, ou *sur deux courbes*.

Pour abréger le discours, j'appellerai *courbes fondamentales* les courbes du réseau déterminé par les conditions ci-dessus.

4. J'appelle *figures isographiques planes de l'ordre n deux figures telles, qu'à une droite quelconque de la première* (F) *il correspond*, *dans la seconde* (F'), *une courbe de l'ordre n*, *douée d'un point multiple de l'ordre n* — 1 *en un point fixe* O', *et passant par* 2 *n* — 2 *autres points fixes* (*).

(*) Ces conditions sont les seules qu'on puisse poser *à priori*; il en résulte, comme on va le voir, cette conséquence nécessaire que, réciproquement, à une droite quelconque de la figure (F') il correspond, dans la figure (F), une courbe douée d'un point fixe de l'ordre $n-1$, et passant

De telles figures peuvent exister. Car soient

$$L = o,\quad L' = o,\quad L'' = o,$$

les équations de trois droites données de la figure (F). Toute droite de cette figure pourra être représentée par une équation de la forme

$$L + \lambda L' + \mu L'' = o,$$

λ et μ étant deux indéterminées. Soient aussi

$$C = o,\quad C' = o,\quad C'' = o,$$

les équations de trois courbes de l'ordre n, assujetties aux conditions précitées dans la seconde figure (F'). Toute autre courbe, satisfaisant aux mêmes conditions, aura une équation de la forme

$$C + \lambda' C' + \mu' C'' = o,$$

λ' et μ' étant deux nouvelles indéterminées.

Or, si l'on suppose $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = b\mu$, a et b étant deux constantes, ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$C + a\lambda C' + b\mu C'' = o,$$

il est clair qu'à une droite de la première figure il correspondra, dans la seconde, une courbe unique et déterminée, puisque les valeurs de λ et de μ seront déterminées par la droite, et réciproquement. On en conclut aussi que, *à un point, considéré dans la figure* (F) *comme étant l'intersection de deux droites, il ne correspondra, dans la figure* (F'), *qu'un seul point, variable avec le premier, et résultant de l'intersection des deux*

par $2n-2$ autres points fixes. Mais cette réciproque n'est pas évidente, et il est indispensable de la démontrer. C'est ce que je ferai ci-après (nos 7, 8 et 9).

courbes fondamentales correspondantes à ces droites (n° 3).

5. Cette analyse prouve immédiatement que, pour déterminer deux figures isographiques planes d'un ordre quelconque, on peut prendre arbitrairement quatre droites de la première figure, et les quatre courbes correspondantes de la seconde. Car, à l'aide de l'équation de la quatrième courbe, on déterminera les valeurs des constantes a et b de l'équation précédente, savoir :

$$a=\frac{\lambda}{\lambda'},\quad b=\frac{\mu}{\mu'},$$

λ et μ, λ' et μ' étant les valeurs numériques des coefficients de L', L'' et C', C'', respectivement, qui conviennent particulièrement à la quatrième droite et à la quatrième courbe correspondante.

6. Le caractère distinctif des figures isographiques consiste donc d'abord en ce que, à une droite L de la figure (F), il correspond, dans la figure (F'), une courbe C^n, qui passe par $2n-1$ points fixes, dont l'un est multiple de l'ordre $n-1$; que, à un point variable a de la figure (F), il correspond, dans la figure (F'), un seul point a' variable avec a, et enfin qu'à un point a', considéré dans (F') comme étant le point d'intersection de deux courbes fondamentales, il correspond, dans la figure (F), un seul point variable a, situé à l'intersection des deux droites correspondantes à ces courbes.

7. Il résulte de là, ainsi qu'on va le démontrer, que, *réciproquement, à une droite quelconque* L' *de la figure* (F'), *il correspond, dans la figure* (F), *une courbe* C^n *de l'ordre* n, *qui passe par* $2n-1$ *points fixes, dont l'un est de l'ordre* $n-1$; *et qu'à un point*

variable a′ *de la figure* (F′), *il ne correspond qu'un seul point variable a dans la première.*

En effet, la droite L′ rencontre l'une quelconque C'^n des courbes fondamentales de la figure (F′) en n points a', b', c',..., variables avec cette courbe. Donc (n° 6) il correspond à ces points, dans la figure (F), n points a, b, c,..., situés sur la droite M, qui, dans cette figure, correspond à C'^n. Par conséquent, la ligne inconnue, qui correspond à la droite L′, est une courbe C^n du degré n, puisque cette ligne possède n points sur une droite quelconque M.

8. Je dis, en outre, que cette courbe C^n passe par $2n-1$ points fixes, dont un est multiple de l'ordre $n-1$.

Pour le démontrer, commençons par remarquer que les $2n-1$ points fondamentaux de la figure (F′) déterminent complétement une certaine courbe fixe $\sum'_{n-1}$, de l'ordre $n-1$, douée au point fondamental O′ d'un point multiple de l'ordre $n-2$; car cette courbe se trouve ainsi, par équivalence, assujettie à passer par $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ points, c'est-à-dire par autant de points qu'il en faut pour déterminer une courbe du degré $n-1$.

Cela posé, considérons le système composé de la courbe $\sum'_{n-1}$ et d'une droite de direction quelconque O′L′, issue du point multiple fondamental O′. Ce système est l'une des courbes fondamentales de la figure (F′), et il en existe une infinité de semblables, déterminées par les différentes droites qu'on peut mener du point O′, en les associant à la courbe fixe $\sum'_{n-1}$. En effet, chacun de ces systèmes représente une courbe du degré n, qui a

un point multiple de l'ordre $n-1$ en O', et qui passe par tous les autres points fondamentaux de la figure (F').
A chacune de ces courbes particulières, que j'appellerai *courbes fondamentales brisées,* il correspond, dans (F), une certaine droite L; et comme ces courbes forment un faisceau, les droites correspondantes en forment un aussi, c'est-à-dire qu'elles passent toutes par un seul et même point O.

Soit actuellement M' une droite quelconque de la figure (F'). Chacune des courbes fondamentales brisées ne coupe M' qu'en un seul point qui varie avec cette courbe; car les $n-1$ autres points d'intersection sont ceux où M' coupe la courbe fixe et invariable $\sum'_{n-1}$, et par conséquent sont invariables, quelle que soit la courbe sécante. Donc chacune des droites, telles que L, qui, dans la figure (F), correspondent à ces courbes brisées, doit être telle, qu'elle ne coupe la courbe S^n, correspondante à la droite M', qu'en un seul point susceptible de varier avec cette droite, ce qui ne peut évidemment avoir lieu que si la courbe S^n est douée d'un point de l'ordre $n-1$ situé sur cette droite. Or toutes ces droites L passent par un même point O; donc c'est ce point O lui-même qui est le point de l'ordre $n-1$ sur la courbe S^n. On en conclut, puisque S^n est une courbe fondamentale *quelconque* de la figure (F), que toutes ces courbes sont douées d'un point de l'ordre $n-1$ en un même point fixe O.

9. En second lieu, considérons le système composé d'une droite O'a' joignant le point O' à l'un a' des points simples fondamentaux (B') de la seconde figure, et d'une courbe S'_{n-1}, douée en O' d'un point de l'ordre $n-2$, et passant par tous les points fondamentaux (B') à l'exclusion

du point a'; courbes dont il existe une infinité, puisque chacune d'elles, pour être déterminée, a besoin d'une condition de plus que celles qui viennent d'être indiquées; ce système forme une autre espèce de *courbe fondamentale brisée* de la figure (F'). Donc il lui correspond, dans la figure (F), une certaine droite L; et toutes les droites L, correspondantes à ces courbes brisées qui forment un faisceau, forment elles-mêmes un faisceau, c'est-à-dire passent par un même point a.

Soit maintenant une droite quelconque M' de la figure (F'). Chacune des courbes brisées, dont il vient d'être question, coupe M' en un point fixe (M', O'a'), et en $n - 1$ autres points, seuls susceptibles de varier en même temps que cette courbe. Donc la courbe S^n, correspondante à M', doit être telle, qu'elle ne coupe chaque droite L, correspondante à une courbe brisée, qu'en $n - 1$ points susceptibles de varier avec cette droite, et que le $n^{ième}$ point d'intersection soit fixe; ce qui exige que la courbe passe par un point fixe situé sur cette droite. Or toutes les droites L passent, comme on vient de le dire, par un même point a. Donc la courbe S^n passe aussi par ce point, et par conséquent il en est de même de toutes les autres courbes fondamentales de (F), puisque S^n est l'une *quelconque* de ces courbes.

En considérant successivement les autres points fondamentaux b', c', d',..., de la figure (F'), on prouverait pareillement que chaque courbe S^n passe par autant de points fixes b, c, d,..., dans la figure (F). Donc enfin

Il existe une réciprocité parfaite entre les deux figures, et l'on peut compléter la définition des figures isographiques donnée plus haut (n° 4), en disant que *réciproquement, à une droite quelconque de la seconde figure, il correspond, dans la première, une courbe du*

degré n assujettie à passer par $2n-1$ points fixes, dont l'un O est multiple de l'ordre $n-1$.

10. Cherchons maintenant, afin de bien approfondir les relations existantes entre les deux figures, quels sont les points d'une figure qui correspondent aux points fondamentaux (simples ou multiple) de l'autre.

Soient deux droites OL, OM de la figure (F). Les courbes correspondantes dans (F′) sont des courbes brisées, composées de la courbe fixe $\sum'_{n-1}$ et de deux droites O′L′, O′M′. Ainsi le point multiple O a pour homologues, dans la figure (F′), tous les points de la courbe $\sum'_{n-1}$ indistinctement. Et, réciproquement, le point multiple O′ a pour homologues tous les points de la courbe $\sum_{n-1}$, qui est déterminée, dans la figure (F), par les $2n-2$ points fondamentaux $a, b, c,\ldots$, et par le point O, considéré comme étant multiple de l'ordre $n-2$.

Soient OL et LM deux droites de la figure (F), qui se coupent au point L. Les courbes correspondantes de la figure (F′) sont, respectivement, une droite O′L′ combinée avec la courbe fixe $\sum'_{n-1}$, et une autre courbe fondamentale C'_n. Or cette C'_n ne coupe $\sum'_{n-1}$ en aucun point variable, puisqu'elle a, en commun avec elle, les $2n-1$ points fondamentaux, dont l'un est de l'ordre $n-1$ sur l'une et de l'ordre $n-2$ sur l'autre, ce qui donne, par équivalence, $n(n-1)$ points d'intersection. Donc le point d'intersection de OL et de LM a nécessairement pour homologue le point de rencontre de O′L′ avec la courbe S'_n. Ainsi les points de OL ont leurs ho-

mologues sur $O'L'$ et non sur la courbe fixe $\sum'_{n-1}$; ce qui s'accorde avec ce qu'on vient de démontrer, savoir, que cette courbe fixe correspond tout entière au seul point O.

11. Supposons encore que les droites aL, aM, aN,..., se coupent au point fondamental simple a. Les courbes correspondantes dans la figure (F') se décomposeront, comme on vient de le voir, en une seule et même droite $O'a'$, et en diverses courbes S'_{n-1}, T'_{n-1}, R'_{n-1},..., correspondantes, une à une, aux droites aL, aM, aN,..., respectivement. Ces courbes ayant en commun le point O', qui est de l'ordre $n-2$ sur chacune d'elles, et $2n-3$ autres points, ne se coupent plus. Donc on peut dire qu'au point fondamental a correspondent, dans l'autre figure, tous les points de la droite fixe $O'a'$.

Enfin on démontrerait, par des considérations analogues, que toute droite, telle que ab, qui passe par deux points fondamentaux a, b de la figure (F), a pour correspondante une courbe qui se décompose en trois branches distinctes, savoir, deux droites $O'a'$, $O'b'$, joignant le point O' aux points fondamentaux a', b', et une courbe fixe $\sum'_{n-2}$, de l'ordre $n-2$, qui est déterminée par le point O', considéré comme étant un point multiple de l'ordre $n-3$, et par les $2n-4$ autres points fondamentaux simples de (F').

12. Par exemple, si $n=2$, ce qui est le cas de la transformation conique, toute droite d'une figure, qui passe par l'un des points fondamentaux, a pour homologue, dans l'autre figure, le système de deux droites passant par les trois points fondamentaux de celle-ci ; résultat déjà signalé par MM. Steiner et Magnus, dans le cas particulier dont il s'agit ici.

13. Afin d'abréger, je me bornerai, en général, dans ce qui va suivre, à donner les énoncés des propositions. Mais, après les explications précédentes, le lecteur en trouvera sans peine les démonstrations.

A une courbe quelconque de l'ordre m, tracée dans le plan de l'une des deux figures, il correspond, dans l'autre, une courbe de l'ordre mn, douée en O (ou en O′) *d'un point multiple de l'ordre* $m(n-1)$, *et de* $(2n-1)$ *points de l'ordre m aux points fondamentaux de cette figure.*

14. *Dans deux figures isographiques planes, quatre points de l'une, situés en ligne droite, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues situés sur la courbe correspondante de l'autre figure.*

C'est une généralisation du théorème analogue dans les figures homographiques, qui ne sont au reste qu'un cas particulier des figures isographiques; celui où l'on a $n=1$.

Pareillement, *quatre droites de la première figure, issues d'un même point, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre courbes correspondantes dans la seconde.*

15. *Deux figures isographiques sont déterminées, quand on donne quatre droites de la première figure et les quatre courbes correspondantes de la seconde.*

Elles sont également déterminées, si l'on connaît quatre couples de points homologues, et, en outre, la base (B′) *du réseau des courbes de l'une des deux figures.*

16. Dans ces deux cas, il reste à déterminer les points fondamentaux (B) de l'autre figure. Pour cela, on mènera par le point O′ deux droites quelconques O′L′, O′M′,

et, sur chacune d'elles, on prendra deux points l', L', m', M'. On cherchera leurs homologues l, L, m, M dans l'autre figure. Le point de concours O des deux droites Ll, Mm est le point fondamental multiple de cette figure.

Pour trouver les points fondamentaux simples, on tracera une droite quelconque de la seconde figure, et on déterminera la courbe C^n correspondante dans la première. Ensuite, si l'on mène des droites par les points fondamentaux (B'), on connaîtra immédiatement les droites Oa, Ob, Oc, .., qui, dans la figure (F), font partie intégrante, respectivement, des courbes fondamentales brisées correspondantes à ces droites (n° 11), et qui passent par les points fondamentaux cherchés de la figure (F). Les points d'intersection de ces droites avec la courbe C^n sont les points (B).

17. Dans tout ce qui précède, les figures isographiques étaient tracées indistinctement sur deux plans différents ou sur un seul. Les théorèmes suivants, au contraire, supposent essentiellement qu'elles sont situées sur un seul et même plan. Cette hypothèse donne lieu à des conséquences intéressantes.

*18. *La courbe, lieu d'intersection des droites d'une figure, formant un faisceau, avec les courbes du faisceau correspondant de l'autre figure, est une courbe du degré $n+1$, qui a un point de l'ordre $n-1$ au point multiple fondamental de celle-ci.*

C'est une conséquence du n° 14.

19. *La courbe enveloppe des droites qui joignent les points d'une droite L aux points homologues de la courbe correspondante dans l'autre figure, est une courbe de la classe $n+1$, qui a la droite L pour tangente multiple de l'ordre n.*

20. *Dans deux figures isographiques, placées d'une manière quelconque, les points de la figure* (F'), *qui satisfont à la condition que les droites qui les joignent à leurs homologues respectifs dans la figure* (F) *passent toutes par un même point donné* P, *sont situés sur une courbe* U' *de l'ordre* $n+1$, *qui passe par le point* P *et par les points* (B'), *et qui a en* O' *un point de l'ordre* $n-1$.

Les points correspondants de la figure (F) *sont également situés sur une courbe* U, *de l'ordre* $n+1$, *qui passe par le point* P, *par les points* (B), *et qui a un point de l'ordre* $n-1$ *en* O.

Ces deux courbes U, U', dont les points se correspondent un à un et sont situés sur des droites concourantes en un même point, ont, avec les courbes homologiques ordinaires, certaines analogies qui n'échapperont pas à l'attention du lecteur; je les appellerai *courbes isologiques*, relatives au point P.

Une droite PL, issue du point P, coupe généralement la courbe U en n points, et elle coupe la courbe U' en n autres points, qui sont les homologues des premiers, respectivement. Comme cas particuliers, la droite PL peut passer par le point O, ou par l'un des points simples fondamentaux a, b,...; elle peut aussi se confondre avec la ligne OO', si le point P est pris sur cette ligne. Je n'entrerai pas dans ces détails, qui ne présentent aucune difficulté, après ce qui a été expliqué ci-dessus (n°s 10, 11 et 12).

21. *Deux figures isographiques étant placées d'une manière quelconque dans un même plan, il existe, en général, dans ce plan* $n+2$ *points doubles, c'est-à-dire qui, étant considérés comme appartenant à l'une des deux figures, sont eux-mêmes leurs homologues dans l'autre.*

En effet, soient U et V les deux courbes isologiques de la figure (F), relatives à deux points quelconques P, Q de cette figure. Chacun des points d'intersection de ces deux courbes, étant considéré comme appartenant à la figure (F), est tel, que si on le joint à son homologue dans la figure (F'), on obtient une droite qui passe tout à la fois par le point P et par le point Q. Donc, à l'exception des n points que les deux courbes U, V ont en commun sur la droite PQ, tous ces points d'intersection sont des *points doubles*, c'est-à-dire des points qui coïncident avec leurs homologues. Or ces deux courbes ont $\overline{n-1}^2$ points communs confondus en un seul au point multiple O, et $2(n-1)$ autres points communs, savoir, les points (B). Donc le nombre des points doubles cherchés est

$$\overline{n+1}^2 - \overline{n-1}^2 - 2(n-1) - n = n+2.$$

Ainsi, dans le cas des figures homographiques où $n=1$, le nombre des points doubles est 3, comme on le sait.

22. Il résulte du théorème précédent que, si l'on prend deux points quelconques S, S' dans l'espace, et qu'on les joigne respectivement aux points homologues de deux figures isographiques tracées sur un plan (ou sur deux plans différents), *les arêtes homologues de ces deux faisceaux isographiques se coupent sur une courbe à double courbure du degré $n+2$*, puisqu'il existe, sur un plan quelconque, $n+2$ points doubles, c'est-à-dire $n+2$ points de rencontre de ces arêtes homologues. Ce théorème se conclut aussi du n° 20, et ce second mode de démonstration fait mieux connaître les particularités de la courbe gauche engendrée. On voit ainsi que cette courbe passe par les points S, S', O, O', et n'y a pas de point double; elle est donc, à ce point de vue, générale dans

son degré. Mais, ainsi que le lecteur le reconnaîtra avec un peu d'attention, elle offre cette singularité qu'elle s'appuie n fois sur chacune des droites SO, S'O'.

23. Dans le cas de $n = 1$, les deux faisceaux de droites sont homographiques, et la courbe à double courbure est du troisième ordre, comme on le savait (*). La théorie des figures isographiques conduit donc directement à une généralisation de ce mode particulier de génération, et le rend applicable à des courbes gauches de tous les ordres, lesquelles n'offrent aucune autre singularité que celle dont je viens de parler. Cette théorie d'ailleurs ne fait guère usage que de courbes douées d'un point multiple de l'ordre le plus élevé que leur degré comporte, et l'on sait que ces courbes sont précisément celles que la géométrie pure donne les moyens de construire directement dans tous les cas.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'ELLIPSE;

PAR M. LÉOPOLD BRASSEUR,
Docteur ès Sciences physiques et mathématiques, Répétiteur à l'École des Mines de Liége.

I. *Les bissectrices des angles que les deux rayons vecteurs d'un point quelconque de l'ellipse font avec le grand axe se coupent sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe positif.*

(*) *Voyez* le beau Mémoire sur les courbes à double courbure du troisième ordre, que M. Chasles a inséré dans le tome XLV des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. *Voyez* aussi, dans le t. I[er], 2[e] série, des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, un savant travail de M. Cremona sur quelques parties du même sujet. Ce sont deux belles applications des méthodes fécondes de la Géométrie pure.

Les bissectrices des suppléments des mêmes angles se coupent sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe négatif.

Démonstration. — x', y' étant les coordonnées d'un point n pris sur l'ellipse dont a et b sont les demi-axes principaux, on a

$$(1) \qquad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

En désignant par 2α, $2\alpha'$, les angles que les deux rayons vecteurs du point n font avec le grand axe, on a, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$\tang 2\alpha = \frac{y'}{x'-c},$$

et en changeant $+c$ en $-c$,

$$\tang 2\alpha' = \frac{y'}{x'+c}.$$

Les valeurs de $\tang 2\alpha$ et de $\tang 2\alpha'$ fournissent celles de $\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$ par la formule connue de Trigonométrie

$$\tang\alpha = \frac{-1+\sqrt{1+\tang^2 2\alpha}}{\tang 2\alpha}.$$

Substituant la valeur de $\tang 2\alpha$ dans cette égalité, on a

$$\tang\alpha = \frac{1}{y'}\left[-(x'-c) + \sqrt{x'^2 + y'^2 - 2cx' + c^2}\right].$$

Si dans cette expression on remplace y'^2 par sa valeur tirée de l'équation (1), afin d'exprimer que le point n appartient à l'ellipse, on trouvera que la quantité sous le radical devient un carré parfait en y faisant $a^2 - b^2 = c^2$, et l'on aura

$$(2) \qquad \tang\alpha = \frac{a-x'}{ay'}(a+c),$$

et en changeant $+c$ en $-c$,

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{a-x'}{ay'}(a-c). \tag{3}$$

Actuellement, les équations des deux bissectrices seront

$$y = \text{tang}\,\alpha(x-c), \tag{4}$$

$$y = \text{tang}\,\alpha'(x+c). \tag{5}$$

L'élimination de y entre ces deux équations donne, pour l'abscisse du point d'intersection des deux bissectrices :

$$x = c.\frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\alpha'}{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha'}. \tag{6}$$

Or; d'après les équations (2) et (3), on trouve

$$\frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\alpha'}{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha'} = \frac{a}{c},$$

et l'équation (6) devient

$$x = a.$$

Cette valeur de x étant indépendante des coordonnées du point particulier n pris sur l'ellipse, il s'ensuit que l'équation $x = a$, qui représente une perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe positif, est celle du lieu géométrique mentionné à l'énoncé.

Comme la bissectrice d'un angle est perpendiculaire à la bissectrice du supplément de cet angle, il en résulte qu'on obtient le lieu géométrique dont il est fait mention à la seconde partie de l'énoncé, en remplaçant dans l'équation (6) tang α et tang α' respectivement par $-\dfrac{1}{\text{tang}\,\alpha}$ et $-\dfrac{1}{\text{tang}\,\alpha'}$, ce qui donne pour le lieu cherché

$$x = -a.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Le changement de $+b^2$ en $-b^2$ conduisant aux mêmes résultats, la propriété démontrée convient également à l'hyperbole.

Puisque la bissectrice d'un angle est perpendiculaire à la bissectrice du supplément de cet angle, on déduit aisément du théorème qui précède le corollaire :

Corollaire. — Si deux angles droits tournent chacun autour de son sommet supposé fixe, de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés décrive une droite perpendiculaire à la droite qui unit les sommets des deux angles, le point d'intersection des deux autres côtés décrira une droite parallèle à la première. Les deux droites ainsi décrites seront à égale distance du milieu de la droite qui unit les deux sommets.

II. *La tangente en un point quelconque de l'ellipse et les bissectrices des angles que les deux rayons vecteurs de ce point font avec le grand axe se coupent sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe positif.*

La tangente et les bissectrices des suppléments des mêmes angles se rencontrent sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe négatif.

Démonstration. — En effet, si dans l'équation de la tangente au point x', y' on fait $x = a$, on trouve

$$y = \frac{b^2(a - x')}{ay'},$$

et si dans l'équation (4) ou (5) de l'une ou de l'autre des bissectrices on pose $x = a$, on a dans les deux cas :

$$y = \frac{(a^2 - c^2)(a - x')}{ay'} = \frac{b^2.(a - x')}{ay'},$$

valeur identique à la précédente. Donc, etc.

On démontrerait la seconde partie de l'énoncé en opérant de la même manière sur les équations des bissectrices des suppléments des angles en question. C. Q. F. D.

Corollaire I. — La tangente en un point quelconque de l'ellipse et la bissectrice de l'angle que l'un des deux rayons vecteurs de ce point fait avec le grand axe se coupent sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe positif.

La tangente et la bissectrice du supplément du même angle se coupent sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du demi grand axe négatif.

Corollaire II.—Si un angle droit, dont le sommet coïncide avec l'un des foyers d'une ellipse, tourne autour de ce foyer supposé fixe, les deux côtés de l'angle rencontrent respectivement les perpendiculaires élevées aux extrémités du grand axe, en deux points tels, que la droite qui les unit est tangente à l'ellipse.

Corollaire III. — Si un angle droit tourne autour de son sommet supposé fixe, ses côtés rencontrent respectivement deux droites parallèles situées de part et d'autre de ce sommet en deux points tels, que la droite qui les unit est tangente à une même ellipse dont un des foyers coïncide avec le sommet de l'angle, et dont le grand axe est égal à la distance entre les deux parallèles.

III. *Soient donnés deux faisceaux de rayons, ayant respectivement pour centres les points f et f' et se rencontrant deux à deux sur une droite* D, *perpendiculaire à la droite ff' qui unit les deux centres. En considérant deux rayons quelconques qui se coupent sur la droite* D, *si l'on fait tourner chacun d'eux autour de son centre jusqu'à ce que l'angle qu'il fait actuellement avec la droite ff' soit doublé, les deux rayons dans leur nouvelle position*

se couperont sur une courbe du second degré, ayant pour foyers les centres des deux faisceaux et pour demi grand axe la distance du milieu de la droite ff' à la droite D.

Pour démontrer cette propriété, réciproque du théorème I, supposons la droite D située au delà des deux centres fixes f et f'. Considérons en outre l'ellipse ayant pour foyers les centres f et f', et pour demi grand axe la distance du milieu de la droite ff' à la droite D.

En construisant : 1° les deux rayons vecteurs d'un point quelconque n de cette ellipse ; 2° les bissectrices des angles que ces deux rayons vecteurs font avec le grand axe, ces deux bissectrices se couperont en vertu du théorème I sur la droite D. D'autre part, si on fait tourner chaque bissectrice passant par un foyer autour de ce dernier jusqu'à ce que l'angle de la bissectrice avec le grand axe soit doublé, les deux bissectrices dans leur nouvelle position coïncideront avec les deux rayons vecteurs du point n et par suite se couperont sur l'ellipse proposée. C. Q. F. D.

Remarque. — Cette propriété permet de transformer une droite en une ellipse, et dans cette transformation il existe cette relation entre un point de la droite et le point correspondant sur l'ellipse, que la droite qui les unit est tangente à l'ellipse.

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ET SUR UNE ÉQUATION DU DIXIÈME DEGRÉ DE JACOBI;

PAR M. FAURE.

L'équation générale

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

s'identifie avec

$$(1) \qquad \alpha_1(x-\alpha)^3 + \beta_1(x-\beta)^3 = 0,$$

au moyen des valeurs

$$\alpha_1 = \frac{a\beta + b}{\beta - \alpha}, \qquad \beta_1 = \frac{-a\alpha - b}{\beta - \alpha},$$

et prenant pour α et β les racines de l'équation du second degré

$$(2) \qquad Ay^2 + 2By + C = 0,$$

où j'ai posé

$$A = ac - b^2, \quad 2B = ad - bc, \quad C = bd - c^2.$$

Or, l'équation (1) donne, en désignant par ρ l'une des racines cubiques de l'unité,

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \rho\sqrt[3]{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}} = \rho\sqrt[3]{\frac{a\alpha + b}{a\beta + b}},$$

et l'on peut considérer l'équation donnée comme résolue. Si l'on veut donner à cette valeur la forme ordinaire, on en déduit d'abord

$$(3) \qquad x = \frac{\rho\beta(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - \alpha(a\beta + b)^{\frac{1}{3}}}{\rho(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\beta + b)^{\frac{1}{3}}};$$

mais on peut écrire

$$ax = -b + \frac{\rho(a\beta + b)(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\alpha + b)(a\beta + b)^{\frac{1}{3}}}{\rho(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\beta + b)^{\frac{1}{3}}},$$

la division se fait exactement, on a de plus :

$$(a\alpha + b)(a\beta + b) = -A,$$

donc

$$x = \frac{1}{a}\left\{-b + \rho[A(a\alpha + b)]^{\frac{1}{3}} + \rho^2[A(a\beta + b)]^{\frac{1}{3}}\right\},$$

formule qui donne les trois racines puisque ρ indique l'une quelconque des racines cubiques de l'unité.

M. Le Besgue, dans un article inséré dans le tome VIII, p. 219, arrive aussi à cette formule, mais, comme il le dit, au moyen de réductions assez longues. La méthode précédente ne laisse rien à désirer sous le rapport de la simplicité.

La résolvante (2) et l'équation donnée ont entre elles des relations très-remarquables, indiquées aussi par M. Le Besgue.

1° Si $A = B = C = 0$, auquel cas la résolvante devient identique, l'équation donnée a ses trois racines égales à $-\frac{b}{a}$.

2° Si $AC - B^2 = 0$, auquel cas la résolvante a deux racines égales, l'équation admet la racine double $-\frac{B}{A}$ et la racine simple $-\frac{Ad}{Ca}$. Cela se voit en considérant l'équation (3).

3° Si $A = 0$, ou si $C = 0$, l'équation se réduit à une équation à deux termes. Elle se met en effet sous les deux formes

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{ad - bc}{a} = 0,$$

$$\frac{ac - b^2}{c} x^3 + \frac{b^2}{c}\left(x+\frac{c}{b}\right)^3 = 0.$$

De là concluons que si la résolvante a une racine infinie ou une racine nulle, l'équation donnée se réduira à une équation à deux termes.

Que deviennent les racines de l'équation du troisième degré lorsque le coefficient a du premier terme est nul?

En faisant sur la formule qui exprime la valeur de x des transformations bien simples, on arrive à la rela-

tion (3) qui pour $a = 0$ donne

$$x = \frac{\rho\beta b^{\frac{1}{3}} - \alpha b^{\frac{1}{3}}}{\rho b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{\rho\beta - \alpha}{\rho - 1};$$

pour $\rho = 1$ elle donne l'infini, mais si l'on prend pour ρ des valeurs imaginaires, on trouve

$$x = \frac{-3c \pm \sqrt{4bd - 3c^2}\sqrt{-3}}{6b}.$$

Cette solution exprime les racines de l'équation du second degré

$$3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

Remarque I. — Si l'on applique cette méthode à une équation de degré plus élevé, par exemple à celle du cinquième degré, on voit que l'équation générale

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

s'identifie avec l'équation (1) moyennant les relations

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Les valeurs de α et β sont toujours données par l'équation (2), et l'on trouve

$$x = \frac{1}{a}\Big(-b - (b^2 - ac)^{\frac{1}{5}}\Big\{(a\alpha + b)^{\frac{2}{5}} + (a\beta + b)^{\frac{2}{5}} + (b^2 - ac)^{\frac{1}{5}}\Big[(a\alpha + b)^{\frac{1}{5}} + (a\beta + b)^{\frac{1}{5}}\Big]\Big\}\Big).$$

Remarque II. — La solution précédente de l'équation du troisième degré indique immédiatement une relation entre deux des racines de l'équation. Soit x la racine qui correspond à $\rho = 1$, x_1 celle qui correspond à une des

valeurs imaginaires de cette quantité, on a :

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\sqrt[3]{\frac{a\alpha+b}{a\beta+b}},\quad \frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}=\rho\sqrt[3]{\frac{a\alpha+b}{a\beta+b}};$$

donc

$$\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}=\rho\,\frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

Remplaçant ρ, α, β par leurs valeurs, on a une relation que l'on trouve d'habitude assez péniblement, même en supposant l'équation du troisième degré débarrassée de son second terme. (*Voyez* l'article de M. Lobatto inséré dans le tome IX du *Journal de M. Liouville*, ou l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.)

Résolution de l'équation du dixième degré de Jacobi.

Soit l'équation

$$y^{10}-5qy^8-5q^4y^2+q^5=py^5;$$

je la mets sous la forme

$$(1)\qquad y^5+\frac{q^5}{y^5}-5q\left(y^3+\frac{q^3}{y^3}\right)=p,$$

puis posant

$$(2)\qquad y+\frac{q}{y}=x,$$

d'où

$$y^3+\frac{q^3}{y^3}=x^3-3qx,\quad y^5+\frac{q^5}{y^5}=x^5-5qx^3+5q^2x,$$

l'équation (1) devient

$$x^5-10qx^3+20q^2x=p.$$

Pour résoudre celle-ci, on pose

$$2q=m.n,\quad p=m^5+n^5:$$

cela donne

$$m^5 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}, \qquad n^5 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2},$$

et l'on a

$$x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x = m^5 + n^5,$$

laquelle est vérifiée par

$$x = m + n.$$

Or l'on a, d'après l'équation (2),

$$2y = x \pm \sqrt{x^2 - 4q};$$

donc

$$2y = m + n \pm \sqrt{m^2 + n^2},$$

car

$$2mn = 4q.$$

Remplaçant m et n par leurs valeurs, on a la solution de Jacobi :

$$x = \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{2}{5}}}.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS M. BELLAVITIS.

Pour résoudre l'équation du second degré, on ajoute aux deux membres un terme convenable qui rende le premier membre un carré parfait, puis on extrait la racine carrée

des deux membres. On peut procéder d'une manière analogue pour l'équation du quatrième degré. Soit, par exemple,

$$x^4 + 12x^3 = -55x^2 - 122x - 99;$$

je l'écris ainsi :

$$(x^2 + 6x + v)^2 = (2v - 19)x^2 + (12v - 122x) + v^2 - 99;$$

je détermine v de telle sorte que le second nombre soit un carré parfait, ce qui exige que l'on ait

$$2v^3 - 19v^2 - 198v + 1881 = 36v^2 - 732v + 373$$

ou

$$2v^3 - 55v^2 + 534v - 1840 = 0.$$

Cette équation a la racine 10. Par suite,

$$(x^2 + 6x + 10)^2 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

On voit par cet exemple que la résolution d'une équation du quatrième degré se ramène à celle d'une équation du troisième, sans qu'on soit obligé de recourir à une élimination compliquée.

REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION ET L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS.

1. Soit

(1) $$f(x) = 0$$

une équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré. Posons

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x),$$

$\varphi_0(x)$ désignant la somme de tous les termes de degré pair, et $\varphi_1(x)$ la somme de tous les termes de degré im-

pair. On aura

$$(2)\qquad \varphi_0(-x)=\varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \varphi_1(-x)=-\varphi_1(x).$$

Supposons que l'équation (1) admette deux racines égales et de signes contraires $+a$ et $-a$, et, ce qui revient au même, que son premier membre soit divisible par x^2-a^2. On aura identiquement

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi_0(a)+\varphi_1(a)=0, \\ \varphi_0(-a)+\varphi_1(-a)=0, \end{cases}$$

ou, à cause des équations (2),

$$(4)\qquad \varphi_0(a)-\varphi_1(a)=0.$$

On tire des identités (2) et (3)

$$\varphi_0(a)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(a)=0;$$

d'où l'on conclut que les équations

$$(5)\qquad \varphi_0(x)=0, \quad \varphi_1(x)=0$$

ont une racine commune. Par conséquent, *pour qu'une équation admette deux racines égales et de signes contraires, il faut et il suffit qu'il existe une racine commune aux deux équations que l'on obtient en égalant à 0 d'abord l'ensemble des termes de degré pair, puis l'ensemble des termes de degré impair.*

La recherche des racines communes aux équations (4) est susceptible de simplification. Il faudra d'abord diviser $\varphi_1(x)$ par x, et comme les polynômes $\varphi_0(x)$ et $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ n'ont que des termes de degré pair, en posant $x^2=z$ on diminuera de moitié leur degré.

2. Posons

$$f(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x);$$

la lettre φ, affectée de l'indice 0, 1 ou 2 servant à désigner actuellement l'ensemble de tous les termes dans lesquels l'exposant de x, divisé par 3, donne le même

reste o, 1 ou 2. Si α et α^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité, on aura évidemment

$$(6)\left\{\begin{array}{lll}\varphi_0(\alpha x)=\varphi_0(x), & \varphi_1(\alpha x)=\alpha\varphi_1(x), & \varphi_2(\alpha x)=\alpha^2\varphi_2(x),\\ \varphi_0(\alpha^2 x)=\varphi_0(x), & \varphi_1(\alpha^2 x)=\alpha^2\varphi_1(x), & \varphi_2(\alpha^2 x)=\alpha\varphi_2(x).\end{array}\right.$$

Supposons maintenant que le premier membre de l'équation (1) soit divisible par x^3-a^3. On aura, en ayant égard aux équations (6),

$$\begin{aligned}\varphi_0(a)+\varphi_1(a)+\varphi_2(a)&=0,\\ \varphi_0(a)+\alpha\varphi_1(a)+\alpha^2\varphi_2(a)&=0,\\ \varphi_0(a)+\alpha^2\varphi_1(a)+\alpha\varphi_2(a)&=0,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\varphi_0(a)=0,\quad \varphi_1(a)=0,\quad \varphi_2(a)=0,$$

en sorte que les équations

$$(7)\qquad \varphi_0(x)=0,\quad \varphi_1(x)=0,\quad \varphi_2(x)=0$$

auront une racine commune a (et même trois, puisque αa et $\alpha^2 a$ y satisfont également).

D'ailleurs, tous les termes de la seconde sont divisibles par x, et tous ceux de la troisième par x^2. Lorsque ces facteurs communs auront été enlevés, les équations (7) s'abaisseront à un degré trois fois moindre en faisant $x^3=z$.

Ces propriétés, et d'autres analogues, ont été données par Lambert dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1763. Elles ont de nombreuses conséquences qui ne paraissent pas avoir été suffisamment remarquées.

3. Supposons que deux racines de a et b de l'équation (1) aient une somme connue $2s$. L'équation $f(x+s)=0$ aura deux racines égales et de signes contraires qu'on trouvera par la règle du n° 1, et l'on aura à effectuer une élimination bien moins laborieuse qu'en suivant la méthode indiquée dans la plupart des Traités d'Algèbre.

4. Quand l'équation $f(x) = 0$ est de degré pair, et que toutes ses racines se partagent en couples donnant une somme $2s$, l'équation $f(x+s) = 0$ a ses racines égales deux à deux et de signes contraires. Par suite, pour savoir si une équation jouit de cette propriété (et en particulier si elle a ses racines en progression arithmétique), il faudra faire disparaître le second terme. Alors tous les termes de rang pair devront disparaître.

Si l'équation $f(x)$, de degré impair, a une racine égale à s, et toutes les autres donnant deux à deux la somme $2s$, l'équation $f(x+s) = 0$ aura, dans ce cas, une racine nulle, et toutes les autres seront deux à deux égales et de signes contraires. L'équation $f(x+s) = 0$ n'aura donc que des termes de degré impair.

5. Si l'équation $f(x) = 0$, de degré pair ou impair, est telle que ses racines groupées deux à deux donnent la même somme $2s$ (avec une racine unique égale à s, dans le cas où le degré est impair), l'équation $f(x+s) = 0$ n'aura que des termes de même parité; il en sera de même des équations $f'(x+s) = 0$, $f''(x+s) = 0, \ldots$ qui auront alternativement ou toutes leurs racines égales deux à deux et de signes contraires, ou bien une racine nulle et toutes leurs autres racines égales et de signes contraires.

De là résulte ce théorème :

Si les racines de l'équation de degré pair

$$f(x) = 0$$

peuvent se partager en couples donnant une somme $2s$, *les racines des équations*

$$f''(x) = 0, \quad f^{\text{IV}}(x) = 0, \quad f^{\text{VI}}(x) = 0, \text{ etc.}$$

jouiront de la même propriété, et il en sera de même (la racine s *mise à part) pour les racines des équations*

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\text{V}}(x) = 0, \ldots$$

Ce théorème et un autre, analogue pour les équations de degré impair, ont été proposés par nous comme exercice dans les *Nouvelles Annales* (question 392, t. XVI, p. 311) et démontrés t. XVII, p. 157.

6. Proposons-nous de trouver l'équation dont les racines sont les moyennes arithmétiques des racines d'une équation proposée, prises deux à deux.

Si $2s$ représente la somme de deux racines de l'équation $f(x) = 0$, l'équation $f(x+s) = 0$ aura deux racines égales et de signes contraires. Il suffira donc d'exprimer que l'ensemble des termes de degré pair de $f(x+s)$ et l'ensemble des termes de degré impair s'annulent pour la même valeur de x : l'opération reviendra à éliminer x^2 entre les équations obtenues quand on égalera à zéro la première somme, et la seconde divisée par x.

Exemples. — 1° Soit

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 = 0$$

l'équation proposée : posons

$$f(x+s) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + S_3 x^3 + S_4 x^4 = 0,$$

S_0, S_1, S_2, etc., désignant $f(s)$, $f'(s)$, $\frac{f''(s)}{1.2}$, etc. ; il faudra éliminer x^2 entre les équations

$$S_0 + S_2 x^2 + S_4 x^4 = 0,$$
$$S_1 + S_3 x^2 = 0,$$

ce qui donne

$$S_0 - \frac{S_1 S_2}{S_3} + \frac{S_1^2 S_4}{S_3^2} = 0,$$

ou

$$S_0 S_3^2 - S_1 S_2 S_3 + S_1^2 S_4 = 0.$$

Pour le cinquième degré, on trouvera

$$(S_0S_3 - S_1S_2)(S_2S_5 - S_3S_4) - (S_0S_5 - S_1S_4)^2 = 0,$$

et, pour le sixième degré,

$$[(S_1S_4 - S_0S_5)S_1 - (S_1S_2 - S_0S_3)][(S_1S_0 - S_0S_5)S_5 - S_1S_3S_6] + [(S_1S_2 - S_0S_3)S_5 - S_1^2S_0]^2 = 0.$$

7. Ce qui précède conduit au théorème que j'ai donné sans démonstration dans les *Nouvelles Annales* (t. XVIII, p. 257), et dont je rétablis ici l'énoncé légèrement modifié :

Soit $f(x) = 0$ *une équation algébrique ; soient* $\varphi_0(x)$ *l'ensemble des termes de degré pair, et* $\varphi_1(x)$ *l'ensemble des termes de degré impair du développement de* $f(x+s)$. Soit $\psi(s)$ *le reste indépendant de* x^2, *mais fonction de* s, *qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre* $\varphi_0(x)$ *et* $\frac{\varphi_1(x)}{x}$. *L'équation* $f(x) = 0$ *aura autant de diviseurs commensurables du second degré qu'il y aura de valeurs commensurables de* s *satisfaisant à l'équation* $\psi(s) = 0$.

(*Sera continué.*) P.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 380 ;

PAR M. CREMONA.

Soient donnés un angle trièdre trirectangle ayant un sommet au point S, *et un point quelconque* O *par lequel on mène un plan* P *coupant les faces de l'angle*

suivant ABC; *trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point* O *partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles* : p, p', p'' *étant les aires des parallélogrammes, on a*

$$\frac{1}{p^2\sin^2(\mathrm{SA},\mathrm{P})}+\frac{1}{p'^2\sin^2(\mathrm{SB},\mathrm{P})}+\frac{1}{p''^2\sin^2(\mathrm{SC},\mathrm{P})}$$
$$=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2\frac{1}{\sin^2(\mathrm{SO},\mathrm{P})}.$$

(MANNHEIM).

Prenons les arêtes δA, δB, δC du triangle trirectangle pour axes coordonnés; soient a, b, c les coordonnées du point O, et

$$\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\nu(z-c)=0$$

l'équation du plan ABC. Alors, en supposant O placé dans l'intérieur du triangle, on a les aires

$$p=\frac{bc\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\lambda},\quad p'=\frac{ca\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\mu},$$
$$p''=\frac{ab\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\nu},$$

c'est-à-dire que les aires p, p', p'' sont proportionnelles aux quantités $\frac{1}{\lambda a}$, $\frac{1}{\mu b}$, $\frac{1}{\nu c}$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda^2p^2}+\frac{1}{\mu^2p'^2}+\frac{1}{\nu^2p''^2}\quad\text{et}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2$$

sont proportionnelles aux quantités

$$a^2+b^2+c^2\quad\text{et}\quad(\lambda a+\mu b+\nu c)^2,$$

d'où

$$(1)\ \frac{1}{\lambda^2p^2}+\frac{1}{\mu^2p'^2}+\frac{1}{\nu^2p''^2}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2\frac{a^2+b^2+c^2}{(\lambda a+\mu b+\nu c)^2},$$

ce qui exprime le théorème énoncé dans la question 380.

Si le point O tombe hors du triangle ABC, mais dans l'intérieur de l'un des angles BAC, CBA, ACB, par exemple dans ABC, les aires p, p', p'' seront proportionnelles aux quantités $-\frac{1}{\lambda a}$, $\frac{1}{\mu b}$, $-\frac{1}{\nu c}$, d'où il suit que, dans ce cas, il faut changer le signe de p' dans l'équation (1).

Si le point O se trouve hors des angles BAC, ABC, BCA, l'équation (1) reste la même.

Tout cela suit immédiatement de la manière dont l'aire du triangle ABC, qui est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,\frac{(\lambda a+\mu b+\nu c)^2}{\lambda\mu\nu},$$

est composée avec les aires des parallélogrammes et des triangles qui résultent des trois parallèles aux côtés BC, CA, AB. Ces dernières aires sont

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\mu\nu}\lambda a^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\nu\lambda}\mu b^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\lambda\mu}\nu c^2.$$

Question 486

(voir t. XVIII, p. 387);

PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

L'aire de la podaire du centre d'une ellipse est une moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (ARTHUR LESCASES.)

Soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

L'équation de la podaire sera

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Pour trouver l'aire de cette courbe, il est commode d'employer les coordonnées polaires. Prenons donc le centre de l'ellipse pour pôle et son grand axe pour axe polaire. L'équation de la podaire sera

$$\rho^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

Or, on sait que l'équation d'une courbe étant mise sous la forme $\rho = \varphi(\omega)$, l'aire de cette courbe comprise entre l'axe polaire et le rayon vecteur qui fait avec lui l'angle ω, est donnée par la formule

$$u = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega.$$

Dans le cas de la podaire d'ellipse, on aura donc

$$u = \frac{1}{2}\int (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)d\omega,$$

ou bien

$$u = \frac{a^2}{2}\int \cos^2\omega\, d\omega + \frac{b^2}{2}\int \sin^2\omega\, d\omega.$$

Or, on a

$$\int \cos^2\omega\, d\omega = \int \frac{1+\cos 2\omega}{2} d\omega = \frac{\omega}{2} + \frac{\sin 2\omega}{4} + \text{const.},$$

$$\int \sin^2\omega\, d\omega = \int \frac{1-\cos 2\omega}{2} d\omega = \frac{\omega}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4} + \text{const.}$$

Par conséquent, on aura

$$u = \frac{a^2+b^2}{4}\omega + \frac{\sin 2\omega}{8}(a^2-b^2) + \text{const.}$$

La constante est nulle, puisque, pour $\omega = 0$, l'aire doit être nulle.

Nous aurons l'aire entière, en faisant dans la formule

précédente $\omega = 2\pi$, et par conséquent on aura pour la surface cherchée

$$\text{surf} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 540

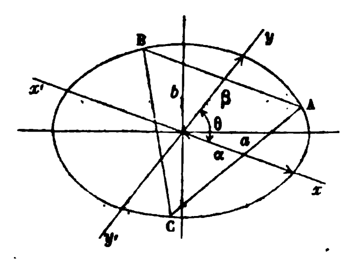
(voir tome XIX, page 281);

PAR M. HEMMING,
Élève de l'École Polytechnique de Zurich.

Dans une ellipse donnée inscrire un triangle équilatéral dont le côté soit 1° un maximum, 2° un minimum.

Rapportons la position de chaque triangle équilatéral ABC, inscrit dans l'ellipse donnée, à deux diamètres conjugués, dont l'un xx' est parallèle au côté AB du triangle; il s'agit de déterminer ces diamètres conjugués, pour que le triangle satisfasse aux conditions données.

Soient 2α, 2β les longueurs des diamètres conjugués :



$2a$, $2b$ $(a > b)$ celles des axes de l'ellipse. Les coordonnées des sommets A, B, C du triangle sont

A........ x, $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$,

B........ $-x$, $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$,

C........ x_1, $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x_1^2}$.

Le triangle étant équilatéral, on a les équations

$$4x^2 = (x - x_1)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}(x - x_1)\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)\cos\theta,$$

$$4x^2 = (x + x_1)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}(x + x_1)\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)\cos\theta,$$

θ désignant l'angle que font les diamètres conjugués entre eux.

En soustrayant la seconde équation de la première, et divisant le résultat par $-4x$, on obtient

$$(1) \qquad x_1 - \frac{\beta}{\alpha}\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \sqrt{\alpha^2 - x_1^2}\right)\cos\theta = 0.$$

Combinant cette équation avec l'une des première on a

$$(2) \qquad 3x^2 - x_1^2 \operatorname{tang}^2\theta = 0.$$

Considérant que

$$(3) \qquad \alpha\beta\sin\theta = ab, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2,$$

la résolution des équations (1) et (2), par rapport à x donne

$$(4) \qquad x^2 = \frac{48a^4b^4}{[3(a^2+b^2)-\xi]^2\xi + 12a^2b^2\xi}$$

en posant $\xi = \dfrac{4a^2b^2}{\alpha^2}$.

Puisque dans la dernière équation le numérateur est constant, suivant que le dénominateur sera un minimum ou un maximum, x^2, ou, ce qui sera la même chose, la

valeur absolue $2x$ du côté du triangle sera maximum ou minimum.

En désignant par D le dénominateur, nous avons

$$\frac{d\mathrm{D}}{d\xi}=[3(a^2+b^2)-\xi]^2-2\xi[3(a^2+b^2)-\xi]+12a^2b^2=0.$$

Cette équation est satisfaite par les valeurs

(5) $$\xi=2(a^2+b^2)\pm(a^2-b^2),$$

et, pour ces deux valeurs, nous avons la dérivée seconde

(6) $$\frac{d^2\mathrm{D}}{d\xi^2}=\pm 6(a^2-b^2).$$

En prenant la première valeur

$$\xi=2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)$$

ou

(7) $$\alpha^2=\frac{a^2b^2}{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2},$$

le côté $2x$ du triangle devient un maximum : pour la seconde valeur, ou

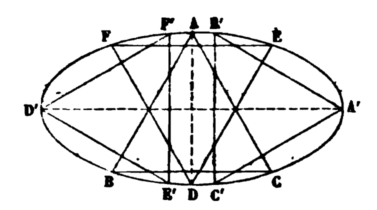
(8) $$\alpha^2=\frac{a^2b^2}{\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2},$$

un minimum.

Considérant que

$$\frac{3}{4}=\sin^2 60^\circ=\sin^2 120^\circ$$
$$=\cos^2 30^\circ=\cos^2 150^\circ,$$
$$\frac{1}{4}=\cos^2 60^\circ=\cos^2 120^\circ$$
$$=\sin^2 30^\circ=\sin^2 150^\circ,$$

il est aisé de voir que les côtés des deux triangles équila-



téraux ABC et DEF, dont les sommets A et D coïncident avec les extrémités du petit axe AD de l'ellipse, sont des maxima, et que les côtés des deux triangles A'B'C' et D'E'F', dont les sommets A' et D' coïncident avec les extrémités A' et D' du grand axe, sont des minima.

Question 651

(voir 2e série, t. II, p. 190);

PAR M. JAUFROID,
Professeur au lycée de Vendôme.

Par deux points A *et* B, *pris dans le plan d'une courbe d'un degré quelconque, on décrit une circonférence; on fait le produit des distances du point* A *à tous les points d'intersection de cette circonférence et de la courbe donnée; on fait le produit analogue pour le point* B : *le rapport de ces deux produits est constant, quelle que soit la circonférence passant par les points* A *et* B. (LAGUERRE.)

Je prends pour axe polaire la droite AB et pour origine le point A : la courbe donnée étant algébrique, son équation polaire est

$$f(\rho\cos\omega,\quad \rho\sin\omega)=0. \tag{1}$$

L'équation du cercle est, en posant $AB = a$ et $AMB = \theta$,

(2) $$\rho = a \sin\omega(\cot\omega + \cot\theta).$$

En appelant ρ' la droite MB et $r = \frac{\rho}{\rho'}$, on a

(3) $$r = \sin\theta(\cot\omega + \cot\theta).$$

L'équation (3) donne

$$\cot\omega = \frac{r - \cos\theta}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$\sin\omega = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}}, \quad \cos\omega = \frac{r - \cos\theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}}.$$

Éliminant ρ entre les équations (1) et (2), on a

$$f[a \sin\omega \cos\omega(\cot\omega + \cot\theta), \quad a \sin^2\omega(\cot\omega + \cot\theta)] = 0;$$

remplaçant $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\cot\omega$ par les valeurs précédentes, on obtient

$$f\left(\frac{ar^2 - ar\cos\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}, \quad \frac{ar\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}\right) = 0.$$

r entre dans le dénominateur de $\frac{ar\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$ à une puissance supérieure à celle qui entre dans le numérateur, et dans celui de $\frac{ar^2 - ar\cos\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$ à une puissance égale : il suit de là que, dans les dénominateurs des différents termes de l'équation développée, la plus haute puissance de r sera, ou plus grande que la plus grande puissance de r qui entre dans les numérateurs, ou égale à cette plus haute puissance, laquelle alors proviendra du terme ar^2 dans les numérateurs. Donc, en chassant les dénominateurs, la plus haute puissance de r aura un coefficient indépendant de θ, et, comme le terme indé-

pendant de r restera visiblement le même qu'auparavant, il s'ensuit qu'en divisant tous les termes par le coefficient de la plus haute puissance de r, le dernier terme sera indépendant de θ, et, par suite, il est démontré que le produit des différentes valeurs de r est constant.

Note. — La même question a été résolue par M. de Marcilly, lieutenant-colonel du génie.

Deuxième solution de la question 657;

PAR MM. COURTIN ET GODARD,
Élèves de Sainte-Barbe (cours de M. Moutard).

Si l'équation

$$\begin{gathered} Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots \\ + Dx^p + Ex^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-3} + \ldots + u = 0. \end{gathered}$$

a toutes ses racines réelles, les coefficients D, E, F, G *de quatre termes consécutifs vérifient l'inégalité*

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

(CATALAN.)

En effet, soient h' et h'' deux quantités indéterminées: multiplions l'équation par

$$(x - h')(x - h'') = x^2 - (h' + h'')x + hh'$$

et proposons-nous de disposer de h' et de h'' de façon à faire disparaître les termes dont les coefficients sont F et G. Il est évident que l'équation qui nous donnera h' et h'' devra avoir ses racines imaginaires, car une équation à coefficients réels ne peut manquer de deux termes consécutifs sans avoir des racines imaginaires. L'inégalité qui exprimera que les valeurs de h' et h'' sont imaginaires aura donc lieu toutes les fois que l'équation proposée aura ses racines réelles.

Pour trouver cette condition, voyons ce que deviennent après la multiplication les quatre termes consécutifs.

On a :

$$\ldots + D \left| \begin{array}{rr} x^{p+2} + & E \\ & -(h'+h'')D \\ & \end{array} \right| \begin{array}{rr} x^{p+1} + & F \\ & -(h'+h'')E \\ + & h'h''D \end{array} \left| x^{p} \right.$$

$$\begin{array}{rr} + & G \\ & -(h'+h'')F \\ + & h'h''E \end{array} \left| \begin{array}{l} x^{p-1} + \ldots \\ \quad + \ldots \\ \end{array} \right.$$

et pour que les termes du $p^{ième}$ et du $(p-1)^{ième}$ degré disparaissent, il faut que $(h'+h'')=y$, $h'h''=x$ satisfassent aux relations

$$Dx - Ey + F = 0,$$
$$Ex - Fy + G = 0.$$

De là je tire

$$x = \frac{F^2 - EG}{E^2 - DF},$$

$$y = \frac{DG - EF}{E^2 - DF}.$$

L'équation du second degré qui donnera h' et h'' sera

$$(E^2 - DF)H^2 - (DG - EF)H + F^2 - EG = 0,$$

et pour que cette équation ait ses racines imaginaires on doit avoir

(1) $$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Quand la relation (1) n'est pas vérifiée, l'équation proposée a des racines imaginaires : car si elles étaient toutes réelles, la relation (1) serait vérifiée.

Corollaire II. — Si entre les coefficients E, F, G qui suivent immédiatement un coefficient nul, on a la rela-

tion

$$4EG - 3F^2 \gtreqless 0,$$

l'équation a des racines imaginaires ; car, d'après la relation (1), si toutes les racines étaient réelles on aurait

$$E^2F^2 - 4E^2(F^2 - EG) < 0,$$

ou bien

$$4EG - 3F^2 < 0.$$

Corollaire III. — Il en est de même si l'on a

$$4DF - 3E^2 \gtreqless 0,$$

car si toutes les racines étaient réelles on aurait d'après la relation (1)

$$E^2F^2 - 4F^2(E^2 - DF) < 0,$$

ou bien

$$4DF - 3E^2 < 0.$$

Corollaires IV et *V*. — En supposant successivement E et F nuls, on aura les relations

$$D(DG^2 + 4F^3) < 0,$$
$$G(D^2G + 4E^3) < 0,$$

ce qui démontre les corollaires IV et V.

La méthode que nous venons de suivre pourrait donner des formules plus générales conduisant à un certain nombre de conséquences.

Si on se proposait de faire disparaître trois termes, on serait amené à une équation du troisième degré en H qui aurait deux racines imaginaires, et, après avoir fait disparaître le terme en H^2, on écrirait l'inégalité

$$4p^3 + 27q^2 < 0,$$

qui serait la relation cherchée.

Si pour des degrés supérieurs on connaissait la formule

qui exprime la réalité des racines, la méthode, quoique difficile, serait applicable.

Enfin, si on suppose qu'on veuille faire disparaître un seul terme, une méthode analogue nous conduira à cette conséquence, que le carré d'un coefficient moins le produit de ceux qui le comprennent est $>$ o si les racines sont toutes réelles.

De là on déduit ce théorème connu : quand trois coefficients d'une équation sont en progression géométrique, l'équation a des racines imaginaires.

QUESTIONS.

692. Soit une série de paires de quantités, a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; . . ., les a étant plus grandes que les b, dont la loi de la formation est la suivante :

$$a_x = a_{x-1} + b_{x-1}, \quad b_x = a_{x-1},$$

il faut chercher la limite du rapport $\frac{a_x}{b_x}$ lorsque x devient infini. (Strebor.)

693. Trouver l'équation des courbes parallèles aux ovales de Descartes. (Strebor.)

694. Soient n quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, et si l'on pose

$$\sum \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad \sum \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots,$$

et ainsi de suite : soient

$$f(x) = x^n + x^{n-1} \sum \alpha_1 + x^{n-2} \sum \alpha_1\alpha_2 + \ldots$$

et $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$: démontrer que la valeur algébrique du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & -1\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & -1\ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

est $f(1) - f'(1)$. (MICHAEL ROBERTS.)

695. Si

$$a_1^2 - a_0 a_2 < 0, \quad a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 > 0,$$

alors les racines de l'équation

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

sont toutes imaginaires, et sous les mêmes conditions l'équation

$$a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + 10a_3 x^2 + 5a_4 x + a_5 = 0$$

n'a qu'une racine réelle. (MICHAEL ROBERTS.)

696. Démontrer le tableau suivant relatif à la réalité des racines de l'équation

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2 x + q = 0:$$

$p > 0$ une racine réelle, quatre imaginaires.

$\left.\begin{array}{r} p < 0 \\ p^5 + \frac{q^2}{4} < 0 \end{array}\right\}$ cinq racines réelles.

$\left.\begin{array}{r} p < 0 \\ p^5 + \frac{q^2}{4} > 0 \end{array}\right\}$ une racine réelle, quatre imaginaires.

(MICHAEL ROBERTS.)

697. L'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à deux surfaces homofocales du second

ordre a pour projections, sur les trois plans principaux des deux surfaces, les développées des courbes focales.

(MOUTARD.)

698. Lorsqu'une courbe a quatre foyers sur un cercle, elle en a nécessairement douze autres situés par quatre sur trois autres cercles; tous ces cercles sont orthogonaux entre eux. (LAGUERRE.)

699. En partageant dans un rapport constant les normales d'une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou raccourcie), on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse. (MANNHEIM.)

700. La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement.

(STREBOR.)

QUESTIONS D'EXAMEN (1863)

(voir p. 81).

Géométrie analytique à deux dimensions.

52. Équation générale des courbes du deuxième degré qui touchent l'axe des x à l'origine. Chercher la tangente menée par le second point d'intersection avec l'axe des y.

53. Une courbe de degré impair a-t-elle nécessairement une branche infinie?

54. Discuter les courbes

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \quad y^2(x-1)^2(x-2) = 1,$$

$$(x+y)^2 = 4 - 2(x+y),$$

$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}, \quad 4y^2 + \frac{1}{x^2} = 4.$$

55. On mène dans un cercle des cordes AMB parallèles à une direction donnée. Lieu des points M, tels que $\frac{AM}{BM} = K$.

56. Discuter les courbes représentées par les équations

$$\rho = \frac{\sin 2\omega}{1 - \operatorname{tang}\omega}, \quad \rho = \frac{1}{1 + 2\sin\omega},$$

$$\rho = 1 + 3\cos\omega, \quad \rho = \sin\omega + \cos\omega, \quad \rho = \frac{1}{2\cos\omega - 1}.$$

57. Équation des tangentes menées par un point (α, β) à une conique ayant l'origine pour foyer et pour axe focal l'axe des x.

58. Lieu du centre d'un cercle mobile tangent à une droite donnée et passant par un point donné. Même question si le cercle mobile doit être tangent à une circonférence fixe.

59. Lieu des foyers des coniques qui ont la même directrice et deux points communs.

60. Étant donnée une courbe du deuxième degré, mener par l'origine une corde qui ait son milieu en ce point.

61. Que représentent les équations

$$x + y = 0, \quad x + y = xy, \quad x + y = x^2 y?$$

62. Équation de toutes les circonférences qui ont pour sécante commune l'axe des y.

63. Qu'arrive-t-il quand l'équation en λ, à laquelle on est conduit par la recherche des points communs à deux courbes du second degré, a ses trois racines égales?

64. Exprimer que la droite $mx + ny = 1$ est tangente à une circonférence donnée.

65. Équation d'un paraboloïde hyperboloïde ayant pour plans directeurs $P = 0$, $Q = 0$.

66. Construire une conique connaissant un foyer, la directrice correspondante et le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice.

67. Par le point R d'une ellipse on mène une normale RP terminée en P au grand axe. On élève PM perpendiculaire à cet axe et égal à RP. Lieu des points M.

68. Construire l'angle dont la tangente est $\sqrt{2} - 1$.

69. Équation du système des deux tangentes que l'on peut mener d'un point à une courbe du deuxième degré. Cas où ce système se réduit à un cercle évanouissant.

(*La suite prochainement.*)

DÉMONSTRATION
DE LA SECONDE ÉGALITÉ DE LA QUESTION 681;

PAR M. DE VIRIEU.

Considérons les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x\cos a + y\cos b + z\cos c = M, \\ x\,\text{séc}\,a + y\,\text{séc}\,b + z\,\text{séc}\,c = N, \\ x\,\text{coséc}\,a + y\,\text{coséc}\,b + z\,\text{coséc}\,c = P; \end{cases}$$

ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par 1, $\cos a \cos b \cos c$, $-\sin a \sin b \sin c$. Nous aurons

$$[\cos a + \cos(b+c)]x + [\cos b + \cos(a+c)]y + [\cos c + \cos(a+b)]z = \mathrm{M} + \mathrm{N}\cos a \cos b \cos c - \mathrm{P}\sin a \sin b \sin c,$$

ou bien

$$2\cos\frac{a+b+c}{2} \times \left[x\cos\frac{c+b-a}{2} + y\cos\frac{a+c-b}{2} + z\cos\left(\frac{a+b-c}{2}\right)2\right] = \mathrm{M} + \mathrm{N}\cos a \cos b \cos c - \mathrm{P}\sin a \sin b \sin c,$$

équation dont le premier membre est nul indépendamment des valeurs de x, y, z si l'on a

$$a + b + c = (2k+1)\pi,$$

k étant un nombre entier. Dans cette hypothèse, le système (1) est impossible ou indéterminé, et le déterminant des coefficients des inconnues est nul. C. Q. F. D.

Note. — Une erreur de calcul rend illusoire la démonstration de la page 73. L'égalité (2), p. 72, a lieu pour des angles dont la somme est égale à $(2k+1)\pi$, comme vient de le démontrer M. de Virieu, et aussi quand deux quelconques des angles sont égaux, quel que soit le troisième; mais il est facile de s'assurer, par des substitutions particulières, qu'elle n'a pas lieu pour des valeurs quelconques de a, b, c.

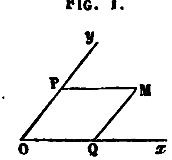
RECHERCHE DES POINTS MULTIPLES A L'INFINI DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAINVIN.

Remarques préliminaires.

I. — 1. COORDONNÉES HOMOGÈNES. — Soit un point M du plan rapporté aux axes Ox et Oy : nous représente-

FIG. 1.



rons les longueurs MP et MQ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et nous dirons que (x, y, z) sont les *coordonnées homogènes* du point M. Pour un point donné, les quantités x, y, z sont indéterminées, les rapports seuls sont connus. On passera aux applications numériques en attribuant à z une valeur particulière, en faisant, par exemple, $z = 1$.

Une équation *homogène* en x, y, z, telle que

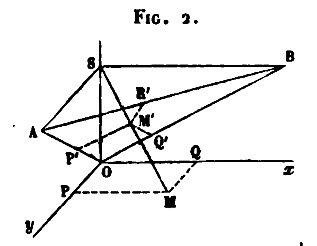
$$f(x, y, z) = 0,$$

représente une courbe parfaitement déterminée, puisque cette équation ne renferme en définitive que les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$.

Signification géométrique. — Soient deux axes rec-

tangulaires Ox et Oy dans le plan; faisons la perspective

Fig. 2.



de la courbe située dans le plan xOy, en prenant pour sommet de la perspective un point S situé sur la perpendiculaire OS au plan xOy, et en supposant que le plan sur lequel on fait la perspective passe par le point O.

Soient OA, OB, AB les intersections du plan de perspective par les plans SOy, SOx et par un plan passant par S et parallèle à xOy.

Soient encore A, B, C les angles respectifs du plan OAB avec les plans SOy, SOx, xOy. Si M est un point du plan xOy et que MP et MQ soient ses distances aux axes Oy et Ox; si M′ est la perspective de ce point sur le plan OAB, et que M′P′, M′Q′, M′R′ soient ses distances respectives aux droites OA, OB, AB, distances que nous désignerons par X, Y, Z, de sorte que

$$X = M'P', \quad Y = M'Q', \quad Z = M'R',$$

on trouve, sans difficulté, les relations suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} MP &= h \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{X}{Z}, \\ MQ &= h \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{Y}{Z}. \end{aligned} \right.$$

h représentant la hauteur OS.

Mais x, y, z étant les coordonnées homogènes du point

M, on a par conséquent

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = h\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\dfrac{X}{Z} = \lambda\dfrac{X}{Z}, \\ \dfrac{y}{z} = h\dfrac{\sin B}{\sin C}\cdot\dfrac{Y}{Z} = \mu\dfrac{Y}{Z}. \end{cases}$$

On obtient des relations semblables en prenant des axes obliques; mais, pour l'objet que nous avons en vue, le cas où nous nous sommes placé est suffisant.

Ceci posé, soit l'équation d'une courbe dans le plan xOy

$$(2)\qquad f(x, y, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0;$$

cette équation deviendra, par la substitution (1),

$$(3)\qquad f(\lambda X, \mu Y, Z) = 0.$$

Mais on peut disposer des constantes qui entrent dans λ et μ, et cela d'une infinité de manières, de façon que λ et μ soient égaux à l'unité; l'équation de la courbe deviendra alors

$$(4)\qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

Nous voyons donc, en comparant les équations (2) et (4), que l'équation (2) peut être interprétée de deux manières différentes.

On peut regarder x, y, z comme les coordonnées homogènes d'un point du plan xOy, et l'équation (2) représente une courbe C située dans ce plan.

On peut aussi regarder x, y, z comme les distances d'un point du plan OAB (satisfaisant aux conditions indiquées) aux trois droites OB, OA et AB, et l'équation (2) représente la perspective C′ de la courbe C sur le plan OAB.

La courbe C est aussi la perspective, sur le plan xOy, de la courbe C'.

2. Droite a l'infini. — Soit l'équation d'une droite

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$(5) \qquad Ax + By + Cz = 0.$$

Les distances à l'origine des points où cette droite ren-

Fig. 3.

contre les axes de coordonnées sont

$$-\frac{C}{A}, \quad -\frac{C}{B}.$$

Si l'on suppose que A et B tendent vers zéro, C étant différent de zéro, la droite AB s'éloigne à l'infini dans le plan; nous lui donnons alors le nom de *droite à l'infini;* dans ces hypothèses, l'équation (5) devient

$$Cz = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0;$$

on doit donc regarder $z = 0$ comme *l'équation de la droite à l'infini.*

Si A et B tendent vers zéro et que leur rapport reste indéterminé, la droite à l'infini aura une direction indéterminée; ainsi l'équation

$$z = 0$$

représente, en général, une droite à l'infini de direction indéterminée.

Si A et B tendent vers zéro et que leur rapport reste fixe, la droite s'éloigne à l'infini en restant parallèle à une direction déterminée.

Signification géométrique. — Considérons la perspective sur le plan xOy de la courbe C′ située dans le plan AOB : la droite AB sera projetée à l'infini. Les relations (1) nous montrent encore qu'à un point situé sur la droite AB, pour lequel $Z = 0$, correspond un point pour lequel $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ sont infinis, ce qui conduit à

$$z = 0,$$

puisque x et y sont arbitraires.

Ainsi nous voyons encore que les projections des différents points de la droite, lesquelles projections sont à l'infini, satisfont à la relation

$$z = 0;$$

cette équation nous donne donc la droite à l'infini ou, en perspective, la droite AB.

Les particularités de la courbe C, qui se trouveront sur la ligne à l'infini, se reproduiront en perspective sur la ligne AB, et inversement, les particularités que la courbe C′ présentera sur la ligne AB se trouveront projetées sur la ligne à l'infini, lorsqu'on fera la perspective de C′ sur le plan xOy. Ce rapprochement me paraît plus que suffisant pour enlever à la conception de la droite à l'infini le vague qu'elle semble présenter au premier abord.

3. Imaginaires. — Il s'agit toujours d'imaginaires de la forme $(a + b\sqrt{-1})$. Nous appellerons *point imaginaire* un point dont les coordonnées sont imaginaires; *droite imaginaire*, une droite dont les coefficients sont

imaginaires, etc. Il ne faut attacher aucune idée de représentation géométrique à ces points, droites, etc., imaginaires; c'est une conception purement analytique, mais absolument indispensable si l'on veut abréger les énoncés et formuler des théorèmes généraux. Et, lorsqu'il s'agit des particularités d'une courbe, cette conception est d'autant plus nécessaire, que les points ou les droites ont une égale influence sur les modifications de la courbe, que ces points ou ces droites soient réels ou imaginaires. Ainsi, un point multiple a toujours la même influence sur la classe de la courbe, qu'il corresponde à des branches réelles ou à des branches imaginaires; une tangente multiple, qu'elle soit réelle ou qu'elle soit imaginaire, a toujours la même influence sur l'ordre de la courbe. Les points, droites, etc., imaginaires sont donc des conceptions purement analytiques, auxquelles il ne faut jamais vouloir donner une représentation géométrique, mais sans lesquelles la Géométrie n'aurait pas de théorèmes généraux; sans lesquelles il serait impossible de rattacher à des idées générales la raison des variétés de classes que présentent les courbes de même ordre, et inversement, etc. Dans cette étude, je ne ferai aucune différence pour les énoncés entre les points réels et imaginaires.

4. Points circulaires a l'infini. — Soit une circonférence quelconque

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$x^2+y^2+2axz+2byz+cz^2=0;$$

les intersections de cette circonférence avec la droite à l'infini sont données par les deux équations (indépendantes de a, b, c)

$$x^2+y^2=0, \quad z=0;$$

ces deux points imaginaires appartiennent à toutes les circonférences situées dans le plan : on les a appelés *points circulaires à l'infini*; je ne discute pas l'expression. On peut dire aussi qu'ils sont les intersections d'un cercle de rayon nul avec la droite à l'infini.

Les circonférences sont donc des courbes du second ordre ayant toutes *deux points communs*. Cette simple remarque suffit pour montrer l'importance des deux points imaginaires

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z = 0,$$

sans parler du rôle qu'ils jouent dans l'étude générale des foyers.

5. Points multiples. — Je définirai comme il suit les points multiples. Un point multiple d'ordre p est un point tel, qu'une ligne *quelconque* passant par ce point y rencontre la courbe en p points coïncidents, et, par suite, ne rencontre plus la courbe qu'en $(n - p)$ autres points différents, si n est de l'ordre de la courbe.

Par un point multiple d'ordre p passent p branches (réelles ou imaginaires) de la courbe; les p tangentes proprement dites à ces branches au point multiple seront les droites qui, passant par ce point, y rencontrent la branche de courbe en $(p+1)$ points; dans ce cas, les tangentes proprement dites auront un contact du premier ordre. Il pourra arriver que le contact de ces tangentes soit d'un ordre plus élevé, et cela aura lieu, si le nombre des points de rencontre est supérieur à $(p+1)$.

II. — Abordons maintenant l'étude des points multiples à l'infini. Je mettrai l'équation de la courbe sous la forme

$$(1) \quad \varphi_n(x, y) + z\varphi_{n-1}(x, y) + z^2\varphi_{n-2}(x, y) + \ldots + z^n\varphi_0 = 0,$$

φ_i représentant une fonction homogène et de degré i des variables x et y.

Les points où la courbe est rencontrée par la droite à l'infini ($z = 0$) seront donnés par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} z = 0, \\ \varphi_n(x, y) = 0. \end{cases}$$

Soit

$$(3) \qquad \varphi_n(x, y) = (y - ax)(y - a_1 x)\ldots(y - a_{n-1} x),$$

nous avons ainsi n points situés sur la droite à l'infini et déterminés par les n droites que fournit la seconde des équations (2) ; nous appellerons *directions asymptotiques* les n droites passant par l'origine, et données par l'équation

$$(3\ bis) \quad \varphi_n(x, y) = (y - ax)(y - a_1 x)\ldots(y - a_{n-1} x) = 0.$$

§ I[er]. — *Points simples à l'infini.*

III. — Considérons un des points à l'infini, par exemple le point

$$\mathrm{I} \begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0, \end{cases}$$

et supposons que ce soit un *point simple*, c'est-à-dire que les fonctions

$$_y\varphi'_n(x, y), \quad \varphi_{n-1}(x, y)$$

n'admettent pas le diviseur $(y - ax)$, nous en verrons plus loin la raison. (Il ne faut pas oublier que cette hypothèse subsiste dans toute l'étendue du § I[er].)

Cherchons la tangente au point I, c'est-à-dire l'*asymptote* correspondant à ce point. Dans ce but, prenons une droite quelconque passant par le point I

$$(4) \qquad y - ax = \lambda z,$$

et exprimons que cette droite rencontre la courbe en deux points confondus avec le point I; c'est-à-dire que nous déterminerons λ par la condition que le premier membre de l'équation (1) est divisible par z^2.

Substituant dans l'équation (1) la valeur de y fournie par l'équation (4) et développant par la formule de Taylor, nous trouvons

$$(5)\left\{\begin{aligned} & x^n\varphi_n(1, a) + x^{n-1}\left[\lambda\varphi'_n(1, a) + \varphi_{n-1}(1, a)\right] z \\ & + x^{n-2}\left[\frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_n(1, a) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{n-1}(1, a) + \varphi_{n-2}(1, a)\right] z^2 \\ & + x^{n-3}\left[\frac{\lambda^3}{1.2.3}\varphi'''_n(1, a) + \frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_{n-1}(1, a) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{n-2}(1, a) \right. \\ & \hspace{15em} \left. + \varphi_{n-3}(1, a)\right] z^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0;$$

les accents désignent ici les dérivées des fonctions φ_i par rapport à la variable y dans lesquelles on a remplacé x par 1 et y par a.

Or $\varphi_n(1, a)$ est nul; le premier membre de l'équation (5) sera donc divisible par z^2, c'est-à-dire la droite (4) sera asymptote, si nous prenons pour λ la valeur

$$(6) \qquad \lambda = -\frac{\varphi_{n-1}(1, a)}{\varphi'_n(1, a)}.$$

Ainsi les asymptotes sont parallèles aux directions asymptotiques; mais il peut arriver que l'asymptote se trouve transportée à l'infini, toujours parallèlement à la direction asymptotique correspondante.

IV. — Discussion de la valeur de λ.

$$1^\circ \qquad \varphi_{n-1}(1, a) = 0, \quad \varphi'_n(1, a) \gtrless 0;$$

alors $\lambda = 0$, c'est-à-dire que l'asymptote coïncide avec la droite ($y - ax = 0$); dans ce cas, l'équation de la courbe

se présente sous la forme

$$(y - ax)\,u_{n-1} + (y - ax)\,u_{n-2}z + z^2\varphi_{n-2} + z^3\varphi_{n-3} + \ldots = 0,$$

les u_i désignant, comme les φ_i, des fonctions homogènes de x et y.

2° $\varphi'_n(1, a) = 0, \quad \varphi_{n-1}(1, a) \gtrless 0;$

alors $\lambda = \infty$, c'est-à-dire que l'asymptote se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique correspondante, car l'équation (4) donne $z = 0$; dans ce cas, l'équation de la courbe a la forme

$$(y - ax)^2 u_{n-2} + z\varphi_{n-1} + z^2\varphi_{n-2} + \ldots = 0.$$

La parabole nous offre un exemple de ce cas particulier.

Si les deux termes de la valeur de λ étaient nuls à la fois, on aurait un point double; nous n'avons pas à nous en occuper pour le moment. Mais il nous reste à faire plusieurs remarques importantes.

V. — *Remarques.*

1. Il peut arriver que pour la valeur particulière a et la valeur correspondante λ, le coefficient de z^2 [équation (5)] s'annule; le point à l'infini serait alors un *point d'inflexion*, et la droite (4) serait la tangente d'inflexion. Ce n'est pas en effet un point double, car une droite *quelconque* passant par le point I ne rencontre pas la courbe en deux points coïncidents, puisqu'on suppose que $\varphi'_n(1, a)$ et $\varphi_{n-1}(1, a)$ ne sont pas nuls à la fois.

Le contact de l'asymptote serait d'un ordre plus élevé, si les valeurs de a et λ annulaient les coefficients de z^2, z^3, z^4,... (nous nous supposons toujours dans le cas d'un point simple).

2. Lorsque l'équation de la courbe se présente sous la

forme

$$(7)\qquad (y - ax)^p u_{n-p} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0,$$

φ_{n-1} n'admettant pas le facteur $(y - ax)$, la droite à l'infini a un contact du $(p-1)^{ième}$ ordre au point à l'infini

$$\begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

En effet, si de l'équation (4) nous tirons la valeur de y pour la substituer dans l'équation (7), il vient

$$(8)\qquad \lambda^p z^p u_{n-p}(x, ax + \lambda z) + zx^{n-1}\varphi_{n-1}(1, a) + z^2 x^{n-2}[\lambda\varphi'_{n-1}(1, a) + \varphi_{n-2}(1, a)] + \ldots = 0.$$

Nous voyons d'abord que le point I n'est pas un point multiple; car une droite quelconque, passant par ce point, n'y rencontre la courbe qu'en un seul point, puisque $\varphi_{n-1}(1, a)$ n'est pas nul d'après notre hypothèse.

En second lieu, la droite (4) ne peut être tangente, c'est-à-dire que le terme en z [équation (8)] ne peut disparaître à moins que λ ne soit infini; donc l'asymptote se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique $y - ax = 0$.

Enfin, cette droite à l'infini a avec la courbe, au point I, un contact du $(p-1)^{ième}$ ordre; car si, dans l'équation (7), on fait $z = 0$, on trouve

$$(y - ax)^p u_{n-p} = 0;$$

cette droite rencontre donc la courbe en p points confondus avec le point I. On peut encore constater plus facilement ces propriétés en posant

$$z = \mu(y - ax)$$

et en remplaçant z par cette valeur dans l'équation (7).

En particulier, si l'équation de la courbe est de la forme

$$(y - ax)^3 u_{n-3} + z\varphi_{n-1} + z^2\varphi_{n-2} + z^3\varphi_{n-3} + \ldots = 0,$$

le point à l'infini ($z = 0$, $y - ax = 0$) sera un point d'inflexion ayant pour tangente la droite à l'infini.

Si l'équation de la courbe est de la forme, par exemple,

$$(y - ax)^2 (y - a_1 x)^2 (y - a_2 x)^2 u_{n-6} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0,$$

φ_{n-1} ne contenant aucun des facteurs binômes qui entrent au carré dans $\varphi_n(x, y)$, la droite à l'infini sera une *tangente triple*.

3. Lorsque les coefficients angulaires de deux directions asymptotiques sont $\pm\sqrt{-1}$, l'équation a la forme

$$(x^2 + y^2) u_{n-2} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0,$$

et la courbe passe par les deux points circulaires à l'infini.

4. Le mode de recherche qui vient d'être exposé est complétement indépendant de la forme particulière $(y - ax)$ que j'ai choisie pour définir la direction asymptotique. Lorsque la direction asymptotique est l'axe des x ou l'axe des y, la droite passant par le point correspondant à l'infini aura pour équation

$$y - \lambda z = 0 \quad \text{ou} \quad x - \lambda z = 0,$$

et le calcul indiqué dans le n° III devient alors beaucoup plus simple.

(*La suite prochainement.*)

SUR LES SECTIONS DU TORE;

PAR M. DARBOUX,
Élève de l'École Normale.

---

1. Le méridien du tore se compose de deux cercles symétriques. Décrivons des sphères ayant ces cercles mé-

ridiens pour grands cercles. Ces sphères seront tangentes au tore, je les appellerai *sphères inscrites*. Deux sphères inscrites *opposées* seront celles dont les centres seront dans un même plan méridien. J'appellerai *distance d'un point à une sphère* la longueur de la tangente menée de ce point à la sphère.

2. Théorème I. — *Le produit des distances d'un point quelconque du tore à deux sphères inscrites opposées est proportionnel à la distance de ce point au plan méridien contenant les centres des deux sphères.*

Soient b le rayon d'une sphère inscrite, a la distance de son centre à l'axe. Désignons par T, T' les longueurs des tangentes menées aux deux sphères opposées ayant leur centre sur l'axe des x, on a

$$TT' = 2ay.$$

La démonstration est facile, soit par l'analyse, soit par la géométrie.

Corollaire I. — Menons un plan sécant parallèle au plan des xz. Il coupera les deux sphères inscrites opposées suivant deux cercles égaux (réels ou imaginaires). Les tangentes à ces cercles seront aussi tangentes aux sphères. D'ailleurs, pour tout point de la section y est constant. Donc :

Une section verticale du tore est le lieu des points tels, que le produit de leurs distances à deux circonférences égales soit constant.

Ces deux circonférences égales se réduiront à des points quand le plan sécant sera tangent aux sphères inscrites. On aura donc une ellipse de Cassini.

Corollaire II. — Considérons le plan bitangent passant par la ligne Oy, et cherchons la nature de la sec-

tion. Soit P un point de cette section :

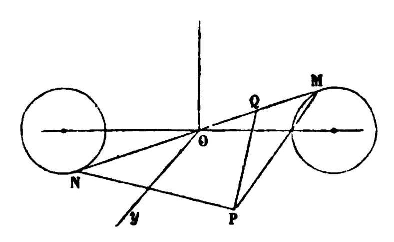
$$y = PQ,$$

$$2ay = \frac{2a}{\overline{MN}} MN.PQ = \frac{4a}{\overline{MN}} \text{surface PMN} = \frac{2a}{\overline{MN}} NP.PM \sin NPM.$$

D'ailleurs $2ay$ est égal, d'après le théorème I, à NP.PM. On a donc

$$\sin NPM = \frac{\overline{MN}}{2a} = \text{constante.}$$

Ainsi le lieu du point P se compose de deux cercles passant par les points M, N et de rayon a.



3. En général, tout plan sécant coupera les deux sphères opposées suivant deux cercles (réels ou imaginaires), et le plan méridien de ces deux sphères suivant une droite; pour tout point de la section, y sera proportionnel à la distance à cette droite. Donc :

Théorème II. — *Les sections du tore sont telles, que le produit des tangentes menées d'un point quelconque à deux cercles est proportionnel à la distance de ce point à une certaine droite.*

On trouvera une infinité de cercles en prenant deux sphères opposées quelconques; l'un de ces cercles pourra se réduire à un point; le lieu des centres des cercles sera l'ellipse projection de la circonférence, lieu des centres des sphères inscrites.

Théorème III. — *Si l'on désigne par t, t', t'', les distances d'un point quelconque du tore à trois sphères inscrites ayant pour distances des centres c, c', c'', on aura*

$$ct + c't' + c''t'' = 0.$$

La démonstration est bien facile : soient deux sphères opposées

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0,$$
$$(x + a)^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0.$$

L'équation d'une sphère inscrite quelconque sera

$$(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\sin\alpha)^2 + z^2 - b^2 = 0.$$

Donc si t, t', T désignent les tangentes menées d'un point du tore, on aura

$$t^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 - b^2,$$
$$t'^2 = (x + a)^2 + y^2 + z^2 - b^2,$$
$$T^2 = (x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\sin\alpha)^2 + z^2 - b^2.$$

Donc

$$4ax = t'^2 - t^2;$$

d'ailleurs,

$$tt' = 2ay,$$

donc, éliminant x et y, on trouve

$$T^2 = \left(t\cos\frac{\alpha}{2} + t'\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2; \pm T = t\cos\frac{\alpha}{2} + t'\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Cette relation trouvée, le théorème se déduit aisément. On peut, au reste, l'obtenir géométriquement.

4. Voyons maintenant les conséquences relatives à une section quelconque.

Soient trois sphères inscrites prises comme on voudra. Ces trois sphères sont coupées suivant le plan sécant par trois cercles qui, pour tout point de la section, peuvent remplacer les trois sphères. Au reste, ces trois cercles sont doublement tangents à la section. Donc :

THÉORÈME IV. — *Toute section du tore est telle, que, si on lui mène trois cercles doublement tangents, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la section aux circonférences de ces trois cercles.*

Soient a, a', a'', les trois distances des centres des cercles pris deux à deux. Si h, h', h'' désignent les distances de ces trois centres aux centres des sphères inscrites respectives, on trouve

$$\sqrt{a^2+(h'-h'')^2}\,t+\sqrt{a'^2+(h-h'')^2}\,t' + \sqrt{a''^2+(h-h')^2}\,t=0.$$

Comme vérification, si l'on fait $h=h'=h''$, on doit trouver un parallèle, et, en effet, on obtient alors la relation

$$at+a't'+a''t''=0$$

qui est vérifiée.

Étant donnée une section du tore, on peut toujours trouver quatre sphères inscrites (réelles ou imaginaires) qui lui soient tangentes. Prenons trois quelconques de ces sphères. Alors les tangentes aux sphères deviendront pour tout point de la section des distances aux points de contact. Deux des sphères seront tangentes d'un côté, l'autre sera tangente de l'autre côté du plan, donc on devra faire

$$h'=h''=b,\quad h=-b,$$

et l'équation précédente deviendra

$$ar+\sqrt{a'^2+b^2}\,r'+\sqrt{a''^2+b^2}\,r''=0.$$

Ce qui démontre :

THÉORÈME V. — *Toute section plane du tore a quatre foyers tels, qu'il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point de la courbe à trois quelconques de ces quatre foyers.*

Ces quatre foyers sont placés symétriquement par rapport à l'axe de la section; ils sont donc sur un cercle.

5. Pour toute section verticale, les quatre sphères tangentes auront leurs points de contact sur l'axe horizontal de la courbe. Considérons, en particulier, l'ellipse de Cassini; pour que les quatre foyers soient réels, il faut poser

$$b = a \sin\varphi;$$

on trouve

$$\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{y^2+(x-a)^2}-\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{y^2+(x+a)^2}$$
$$=\sqrt{y^2+(x-a\cos\varphi)^2}.$$

En élevant au carré, on obtient effectivement

$$\sqrt{y^2+(x-a)^2}\sqrt{y^2+(x+a)^2}=a^2\sin\varphi,$$

donc :

THÉORÈME VI. — *Toute cassinoïde jouit de cette propriété, que si l'on adjoint à ses deux foyers un certain point pris sur l'axe focal, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe aux trois points.*

Si on rapproche les résultats qui précèdent de ceux qui ont été trouvés par M. Garlin, t. XIII, p. 415, on voit que la courbe, lieu des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle constant, a quatre foyers sur le grand axe de l'ellipse.

6. Les sections du tore sont des courbes satisfaisant à l'équation générale

$$r = \mu r' + \nu r'';$$

mais μ et ν sont liés par la relation

$$\mu^2 - \nu^2 = \frac{a'^2 - a''^2}{a^2},$$

a, a', a'' étant les côtés du triangle des trois foyers. Transformons ces courbes par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle un quelconque des trois foyers. Nous trouverons, par exemple, en adoptant le foyer r,

$$\mu_1 r'_1 + \nu_1 r''_1 = 1$$

pour équation de la courbe réciproque. Donc :

Théorème VII. — *Les sections planes du tore peuvent être regardées de quatre manières différentes, comme les courbes réciproques des ovales de Descartes* (*).

Et comme les sections du tore ont quatre foyers sur un cercle, on arrive à cette conséquence, signalée par M. Chasles, que les ovales de Descartes ont trois foyers en ligne droite.

Si l'on considère, en particulier, l'ellipse de Cassini, on voit que (théorème VII) toutes les ovales de Descartes peuvent être considérées comme les réciproques des ellipses de Cassini. Il suffit de prendre pour pôle de transformation un des quatre foyers de l'ellipse de Cassini.

7. Considérons les sections du tore par les plans tangents. Alors il n'y aura plus quatre foyers; deux d'entre eux viendront coïncider au point de contact du plan tangent. L'équation de la courbe sera alors

$$ar + \sqrt{a'^2 + b^2}\,(r' + r'') = 0,$$

car on aura

$$a' = a''.$$

Alors, en prenant pour pôle de transformation le point de

(*) M. Mannheim est parvenu de son côté au même théorème (voir *Journal de l'École Polytechnique*, XL[e] cahier, p. 74). M. Darboux nous avait communiqué son travail avant la publication de ce XL[e] cahier. P.

contact du plan tangent, la courbe réciproque sera une conique. Ainsi :

Théorème VIII. — *Toutes les courbes de section du tore par leur plan tangent peuvent être considérées comme les courbes réciproques d'une conique, le pôle de transformation étant pris au point de contact du plan tangent.*

En particulier, la section faite par le plan tangent parallèle à l'axe sera la réciproque d'une hyperbole qu'il est facile de construire, le pôle étant au centre.

Mais si on prend pour pôles de transformations les deux autres foyers de la section donnée par le plan tangent, on aura des ovales dont deux foyers coïncideront, c'est-à-dire des limaçons de Pascal.

Note A.

Nous avons vu que les sections du tore sont des cas particuliers des courbes contenues dans l'équation générale

$$r = \mu r' + \nu r''.$$

Il semblerait, d'après cela, que les propriétés que nous avons trouvées pour les sections du tore ne doivent pas s'étendre aux courbes les plus générales; mais on démontre facilement qu'en transformant les courbes contenues dans l'équation précédente par rayons vecteurs réciproques, l'équation garde la même forme, et on peut établir entre μ et ν la relation qui caractérise les sections du tore. Ces sections ont quatre foyers sur un cercle; donc, toutes les courbes comprises dans l'équation

$$r = \mu r' + \nu r''$$

ont un autre foyer placé sur le cercle des trois foyers donnés; en un mot, toutes les propriétés que nous avons données peuvent s'étendre aux courbes les plus générales.

Note B.

Si l'on prend pour coordonnées les tangentes à trois sphères égales, le tore a une équation de la forme

$$at + a't' + a''t'' = 0.$$

Supposons que l'on prenne trois sphères quelconques égales ou inégales, trois coefficients quelconques λ, μ, ν, on peut se demander ce que représentera l'équation

$$\lambda t + \mu t' + \nu t'' = 0.$$

D'abord on voit *à priori* qu'elle contiendra une infinité de cercles

$$t = \alpha t',$$

$$(\lambda\alpha + \mu) t' + \nu t'' = 0.$$

Au reste, remarquons que la transformation par rayons vecteurs réciproques n'altérera pas en général la forme de cette équation. Faisons la transformation en prenant pour pôle le point de rencontre des trois sphères

$$t = 0, \quad t' = 0, \quad t'' = 0;$$

l'équation deviendra

$$\lambda \sqrt{P} + \lambda' \sqrt{P'} + \lambda'' \sqrt{P''} = 0,$$

P, P′, P″ étant trois fonctions du premier degré des coordonnées. On aura donc un cône du second degré. Ainsi, l'équation représente la surface réciproque d'un cône. Cette surface est très-intéressante; elle comprend comme cas particuliers le tore, la cyclide (*), et peut être définie comme le lieu d'un cercle qui passe par deux points donnés et s'appuie sur un cercle donné. Outre le cercle générateur, cette surface admet deux séries de cercles cor-

(*) Surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données (Dupin, *Applications de Géométrie*, p. 200, et Mannheim, *Nouvelles Annales*, p. 67; 1860). P.

respondant aux sections circulaires du cône, et quand ces deux séries de cercles se réunissent, on a le tore ou la cyclide.

Note C.

Toutes les propriétés que nous avons données pour les sections du tore s'étendent naturellement aux sections de la cyclide. Toutes les courbes de sections planes ont quatre foyers comme les courbes du tore.

J'attirerai l'attention sur la propriété suivante. Supposons que l'on transforme le tore par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle de transformation à l'intérieur de la surface. Alors il y aura deux sphères inscrites, passant par le pôle, qui se transformeront en plans. La cyclide pourra être considérée comme l'enveloppe des sphères tangentes à deux plans et à une troisième sphère; mais les deux plans tangents aux sphères inscrites passant au pôle coupaient le tore suivant deux courbes ayant un foyer au pôle de transformation. Par suite, les réciproques de ces courbes seront des ovales de Descartes. On voit donc que :

Lorsque la cyclide pourra être considérée comme l'enveloppe des sphères tangentes à une sphère et à deux plans, il y aura deux sections planes parallèles à ces deux plans qui donneront des ovales de Descartes.

SUR UNE CONSTRUCTION D'ABOUL WAFA.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. ARISTIDE MARRE.

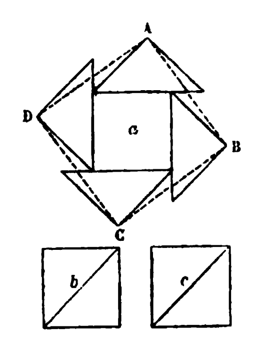
J'emprunte au savant travail que M. Wœpcke (*) a fait paraître dans le *Journal Asiatique*, un problème de géo-

(*) Géomètre et orientaliste distingué, mort à Paris le 25 mars 1864, âgé seulement de trente-sept ans. P.

métrie élémentaire, qui ne manquera pas d'intéresser vos jeunes et studieux lecteurs ; il est extrait du *Recueil des constructions géométriques d'Aboul Wáfa*, et peut s'énoncer ainsi :

Trois carrés égaux étant donnés, en composer un carré unique, par un procédé pratique, matériel pour ainsi dire, sans employer le théorème de Pythagore.

Soient *a*, *b*, *c* les trois carrés égaux proposés. Menez une diagonale dans chacun des carrés *b* et *c*, et disposez



les quatre triangles rectangles isocèles, égaux entre eux, qui en résultent, autour du carré *a*, de la manière indiquée par la figure ci-contre. Les sommets A, B, C, D des angles droits de ces quatre triangles sont les sommets du carré à construire.

En effet, il est facile de reconnaître *à priori* l'existence de deux séries de triangles, les uns intérieurs, les autres extérieurs à la figure ABCD, égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et pouvant être substituée l'une à l'autre.

THÉORÈME SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. MIRZA-NIZAM,
Élève externe de l'École Polytechnique.

Lorsqu'un angle trièdre trirectangle a son sommet placé au centre d'une surface du second degré, le plan qui passe par les points d'intersection des arêtes de l'angle avec la surface enveloppe une sphère concentrique à la surface.

Soient O le centre de la surface et ABC le plan qui joint les points d'intersection des arêtes OA, OB, OC, avec la surface. Du centre O j'abaisse une perpendiculaire OM sur le plan ABC. La pyramide triangulaire OABC a pour volume

$$V = \text{surf. ABC} \times \frac{1}{3}\,\text{OM};$$

elle a aussi pour volume

$$V = \frac{1}{2}\,\text{OA.OB}.\frac{1}{3}\,\text{OC}.$$

Égalant ces deux valeurs de V, on a

$$2(\text{surf. ABC}) \times \text{OM} = \text{OA.OB.OC},$$

ou

$$(1)\qquad \frac{1}{\overline{\text{OM}}^2} = \frac{4(\text{surf. ABC})^2}{\overline{\text{OA}}^2.\overline{\text{OB}}^2.\overline{\text{OC}}^2}.$$

La surface du triangle ABC en fonction des trois côtés est

$$S^2 = \frac{(\text{AB}+\text{BC}+\text{AC})(\text{AB}+\text{BC}-\text{AC})(\text{AB}-\text{BC}+\text{AC})(\text{BC}+\text{AC}-\text{AB})}{16},$$

ou bien effectuant les produits deux à deux, on a

$$S^2 = \frac{\left[2\,AB.BC + \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\right)\right]\left[2\,AB.BC - \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\right)\right]}{16}$$

ou

$$S^2 = \frac{4\overline{AB}^2.\overline{BC}^2 - \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\right)^2}{16}.$$

Remarquant que les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles, et remplaçant $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$ et $\overline{AC}^2$ par leurs valeurs, et effectuant, on a

$$S^2 = \frac{\overline{AO}^2.\overline{OC}^2 + \overline{AO}^2.\overline{OB}^2 + \overline{BO}^2.\overline{OC}^2}{4}.$$

Remplaçant cette valeur de S^2 dans l'égalité (1), il vient

$$\frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2};$$

or, on sait que cette dernière quantité est constante, donc OM est constant, et par suite le plan ABC enveloppe une sphère ayant O pour centre et OM pour rayon.

Un théorème analogue existe pour une courbe à centre et se démontre à peu près de la même manière.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 419

(voir t. XVII, p. 32);

PAR M. J. DE VIRIEU.

La surface d'un triangle dont les côtés sont donnés en nombres entiers ne saurait être rationnelle si, les côtés

étant débarrassés du facteur commun 2, la somme des quotients est impaire.

1. a, b, c étant des entiers absolus qui représentent les côtés d'un triangle, si l'on désigne son aire par s, on a

$$(4s)^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = \mathrm{M}.$$

2. Si le périmètre est impair, ou les trois côtés sont impairs, ou l'un d'eux est impair et les autres pairs.

1er Cas : *a, b, c impairs.* — a^4, b^4, c^4, a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 étant les carrés de nombres impairs, chacun d'eux est de la forme $8\mu+1$, et par suite M est de la forme $8\mu+3$; M ne peut donc être un carré.

2e Cas : *a, b pairs, c impair.* — $a^4+b^4+c^4$ est de la forme $8\mu+1$, $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$ de la forme 8μ, et par suite M est de la forme $8\mu-1$; donc M n'est pas un carré.

3. Donc les *côtés d'un triangle étant représentés par des nombres entiers, si le périmètre est impair, l'aire ne peut être un nombre rationnel.*

On en déduit que, l'aire d'un triangle dont les côtés sont des entiers ne peut être rationnelle, si le quotient de son périmètre par le plus grand commun diviseur entre les côtés est impair.

En effet, soit D ce plus grand commun diviseur, et posons

$$a = \mathrm{D}\alpha, \quad b = \mathrm{D}\beta, \quad c = \mathrm{D}\gamma,$$

d'où

$$\frac{a+b+c}{\mathrm{D}} = \alpha+\beta+\gamma,$$

le rapport entre les aires des triangles ayant pour côtés respectifs : a, b, c; α, β, γ; or l'aire du dernier est

irrationnelle si son périmètre $\alpha + 6 + \gamma$ est impair; donc, etc.

En supposant $D = 2$, on tombe sur la proposition à démontrer.

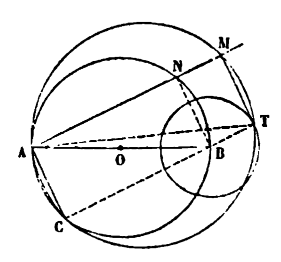
Question 665

(voir 2e série, t. II, p. 371);

PAR M. HAAG,
Élève de l'École Polytechnique.

Étant donnée une série de limaçons de Pascal, décrits avec la même circonférence et ayant même point double, par ce point on trace une transversale, et on fait passer une circonférence par le point double et par chaque point d'intersection, tangente à la courbe en ce point : toutes ces circonférences ont même axe radical, et lorsque la transversale tourne autour du point double, cet axe radical tourne autour de ce point et le second point commun à toutes les circonférences décrit un cercle. (CH. DELEVAQUE.)

Soit O le cercle qui sert à décrire la série de limaçons considérée, A leur point double commun, AB leur axe,



AN une transversale menée par le point double et coupant le cercle O en un second point N. J'appelle M le point où cette transversale rencontre l'un des limaçons de la série : la perpendiculaire élevée en ce point sur AM

est tangente en T au cercle décrit de B comme centre avec NM pour rayon, et l'on sait que le cercle décrit sur AT comme diamètre est tangent en M au limaçon considéré. Il s'agit donc de prouver que tous les cercles obtenus de cette manière en faisant varier la longueur NM ont même axe radical. Or, si nous prolongeons TB jusqu'en son second point d'intersection C avec le cercle O, l'angle ACB étant droit, le cercle AT passera en C, et comme la position de ce point C dépend seulement de la direction de la transversale AN, et point de la longueur NM qui caractérise chaque limaçon, tous les cercles tels que le cercle décrit sur AT passent par les points fixes A et C, et ont par conséquent même axe radical. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que le point C décrit le cercle O lorsque la transversale AN tourne autour du point double.

Note. — La même question a été résolue par MM. Hans, élève du lycée Saint-Louis; Mirza-Nizam, élève externe à l'École Polytechnique; Paul Mansion; Debatisse, élève du lycée Charlemagne; M. Laquière, lieutenant d'artillerie.

Même question (solution analytique) ;

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Une série de limaçons de Pascal, décrits avec la même circonférence et ayant même point double, est représentée (BRIOT et BOUQUET, p. 25) par l'équation

$$(1)\qquad \rho = b\cos\omega + a,$$

où a est un paramètre variable.

Soit

$$\omega = \alpha = \text{constante}$$

l'équation d'une transversale tracée par le point double.

Un cercle passant par ce point a pour équation

$$(2) \qquad \rho = 2d\cos(\omega - k),$$

en désignant par d et k les coordonnées polaires du centre. Mais ce cercle doit aussi passer par le point d'intersection de la courbe (1) avec la transversale, d'où la condition

$$b\cos\alpha + a = 2d\cos(\alpha - k).$$

En substituant, l'équation (2) devient donc

$$(3) \qquad \rho = \frac{b\cos\alpha + a}{\cos(\alpha - k)}\cos(\omega - k).$$

M. Rouché démontre (*voir* Comberousse, *Géométrie analytique*, p. 265) que l'équation de la tangente à la courbe $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$ au point dont la coordonnée angulaire est α, est

$$\frac{1}{\rho} = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

La tangente au point de rencontre de la transversale avec l'équation (1) a donc pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{b\cos\alpha + a} + \frac{b\sin\alpha\sin(\omega - \alpha)}{(b\cos\alpha + a)^2};$$

de même la tangente au point de rencontre de la transversale avec la courbe (3) a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{b\cos\alpha + a} + \frac{\tang(\alpha - k)\sin(\omega - \alpha)}{b\cos\alpha + a}.$$

Puisque le limaçon et le cercle sont tangents au point de rencontre avec la transversale, les deux équations ci-dessus doivent être identiques, ce qui donne

$$\tang(\alpha - k) = \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha + a},$$

d'où l'on tire

$$\text{tang}\, k = \frac{a \sin\alpha}{a \cos\alpha + b}.$$

Mais l'équation (3) peut s'écrire

$$\rho = (b\cos\alpha + a)\frac{\cos\omega + \text{tang}\, k \sin\omega}{\cos\alpha + \text{tang}\, k \sin\alpha},$$

et, en remplaçant tang k par sa valeur,

$$\rho = b\cos\omega + a\cos(\omega - \alpha).$$

Si l'on y considère a comme variable, et qu'on cherche alors l'intersection de tous ces cercles avec une perpendiculaire à la transversale menée par le point double, on trouve toujours le même second point

$$\omega = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \rho = -b\sin\alpha;$$

donc toutes ces circonférences ont même axe radical, et cet axe est perpendiculaire à la transversale.

La dernière équation, lorsqu'on y considère α comme variable, est d'ailleurs celle d'un cercle qui a son centre sur une perpendiculaire à l'axe polaire menée par le point double, à une distance $\frac{b}{2}$ au-dessous de cet axe.

Question 605

(voir 2ᵉ série, t. II, p. 29);

PAR M. JOHN GRIFFITHS.

Lorsqu'un triangle ABC *est à la fois inscrit dans une courbe du troisième degré et circonscrit à cette même courbe, le produit des rayons de courbure aux points* A, B, C *est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC. (MANNHEIM.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, les équations des côtés a, b, c du triangle ABC; ρ_a, ρ_b, ρ_c, les rayons de courbure de la courbe proposée, aux points A, B, C respectivement, R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Alors, l'équation d'une courbe du troisième degré, passant par les sommets de ce triangle et touchant ses côtés, sera

$$(1) \quad \lambda\beta^2\gamma + \mu\gamma^2\alpha + \nu\alpha^2\beta = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad (2) \quad \lambda\beta\gamma^2 + \mu\gamma\alpha^2 + \nu\alpha\beta^2 = 0,$$

λ, μ, ν étant des constantes indéterminées.

Cela posé, il reste à trouver la valeur du rayon de courbure (ρ) de la courbe $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, en un point quelconque (α, β, γ). Elle est

$$\rho = \frac{\left[\sum\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)^2 - 2\sum\frac{dF}{d\beta}\frac{dF}{d\gamma}\cos A\right]^{\frac{3}{2}}}{\sum\frac{d^2F}{d\alpha^2}\left(\frac{dF}{d\gamma}\sin B - \frac{dF}{d\beta}\sin C\right)^2 + 2\sum\frac{d^2F}{d\beta\, d\gamma}\left(\frac{dF}{d\alpha}\sin C - \frac{dF}{d\gamma}\sin A\right)\left(\frac{dF}{d\beta}\sin A - \frac{dF}{d\alpha}\sin B\right)},$$

d'où, en prenant l'équation (1), on trouve facilement

$$\rho_a = \frac{1}{2}\,\frac{\nu}{\mu}\,\frac{b\sin C}{\sin^2 A}, \quad \rho_b = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\nu}\,\frac{c\sin A}{\sin^2 B}, \quad \rho_c = \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\lambda}\,\frac{a\sin B}{\sin^2 C}.$$

ou

$$\rho_a = \frac{\nu}{\mu}\,\frac{bc}{a^2}\,R, \quad \rho_b = \frac{\lambda}{\nu}\,\frac{ca}{b^2}\,R, \quad \rho_c = \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{ab}{c^2}\,R,$$

Leur produit est donc égal à R^3.

C. Q. F. D.

Question 664

(voir 2e série, t. II, p. 371);

PAR M. JOSSELIN,
Lieutenant d'artillerie.

Dans tout triangle inscrit dans une conique, et dont deux côtés sont tangents à une seconde conique, le troisième enveloppe une conique passant par les points d'intersection des deux premières. (CH. DELEVAQUE.)

Soient $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations des trois côtés d'un triangle inscrit dans une conique; A, B, C étant des fonctions du premier degré en x et y.

L'équation d'une conique passant par les trois sommets du triangle est de la forme

$$(1) \qquad AB + \lambda_1 AC + \lambda_2 BC = 0.$$

L'équation d'une conique tangente aux deux côtés A et B est de la forme

$$(2) \qquad AB + \lambda U^2 = 0,$$

$U = 0$ représentant la corde de contact.

Retranchons l'équation (2) de (1), nous aurons

$$(3) \qquad \lambda_1 AC + \lambda_2 BC - \lambda U^2 = 0.$$

Cette équation représente une conique passant par les points d'intersection des deux premières. Et l'on voit, d'après la forme de l'équation (3), que la droite $C = 0$ est tangente à cette dernière conique, car l'équation (3) est satisfaite par $C = 0$, et $U^2 = 0$.

Le théorème est donc démontré.

Note. — Le même théorème a été démontré par M. E. Vieillard, élève à l'institution Favard; MM. Léon Dyrion, Lacauchie, élèves du lycée de Strasbourg. M. de Marsilly observe que le théorème est de M. Poncelet (voir *Propriétés projectives*, p. 327).

QUESTIONS.

701. Démontrer, sans admettre aucun *postulatum*, que l'angle du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés d'un triangle équilatéral excède un demi-angle droit. (LYONNET.)

702. Soit O un cercle fixe, O′ un cercle mobile dont le centre se déplace sur un autre cercle fixe O″ ; l'axe radical des deux premiers a pour enveloppe de ses positions une conique. (DURRANDE.)

703. Déterminer des valeurs entières des quantités x, n, r : 1° telles que la somme

$$x^3 + (x + r)^3 + \ldots + [x + (n - 1) r]^3$$

soit un cube; 2° telles que cette somme soit le cube de $x + nr$. (BALTHASAR BONCOMPAGNI.)

704. Soient C et C′ deux coniques homofocales, M un point pris sur la première, et MN la normale menée au point M et terminée à l'axe focal. La grandeur de la projection de MN sur la tangente à C′ menée par le point M est indépendante de la position du point M sur la conique C. (GROS.)

705. Expliquer comment il se fait que deux conditions soient nécessaires pour qu'une surface du second degré soit de révolution, lorsqu'on sait qu'il suffit que l'équation en s ait deux racines égales. (J.-J.-A. MATHIEU.)

QUESTIONS D'EXAMEN (1863)

(voir p. 141).

Géométrie analytique. (Suite.)

70. On donne un cercle et deux points fixes M et N. On mène la droite MA qui aboutit à un point quelconque A de la circonférence, et l'on prend le milieu I de MA. Enfin on prend, sur NI, $NG = \frac{1}{3}NI$. Lieu des points G.

71. On mène par un même point des normales à un système d'ellipses semblables et concentriques. Lieu des pieds de ces normales.

72. Équation d'une courbe du deuxième degré qui serait doublement tangente à la courbe dont l'équation est

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x - 2y - 1 = 0.$$

Montrer *à priori* que cette équation ne doit renfermer qu'un seul paramètre arbitraire.

73. A combien de conditions une courbe du deuxième degré est-elle assujettie quand on demande qu'elle touche une courbe donnée aux points où celle-ci est rencontrée par une droite donnée?

74. On donne une courbe du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

et le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

On demande l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine aux points

d'intersection des deux courbes. Pourquoi cette équation est-elle du second degré? Disposer de R de manière que cette équation ait des racines égales.

75. Soit un diamètre MM′ d'un cercle. Par le point M′ on mène une droite qui rencontre en A la circonférence et en B la tangente menée par le point M. Sur cette droite on prend M′D = AB. Lieu des points D. Discussion.

76. Par le foyer d'une ellipse, on mène à la directrice correspondante la droite FAB qui rencontre l'ellipse en A et la directrice en B. On a

$$\frac{1}{FA} - \frac{1}{FB} = \text{constante}.$$

77. Équation d'une parabole tangente à l'axe des x au point $(x = 1, y = 0)$, et dont l'axe est parallèle à la bissectrice de l'angle xOy.

78. Discuter la courbe

$$(y - x + 1)(x + y + 2) = 3.$$

79. $P = 0$, $Q = 0$ étant les équations de deux droites, comment sont placées, par rapport aux axes, les droites

$$P + \delta Q = 0, \quad P - \delta Q = 0?$$

80. Propriétés communes à toutes les courbes

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \ldots = 0$$

dans lesquelles A seul est variable. Peut-on trouver une valeur de A telle, que l'équation représente deux droites? Comment seront placées les courbes par rapport à ces deux droites?

81. On mène par un point M d'une parabole une tangente à cette courbe, qui rencontre la directrice au point I, et, par le point M, une normale qui rencontre la courbe

en un second point N. Soit T le point où la tangente menée par N rencontre la tangente MI; on a $MI = MN$.

82. Reconnaître qu'une droite $y = mx + n$ est directrice d'une courbe donnée du second degré.

83. Lieu des points tels, que la somme des tangentes menées de ces points à deux circonférences données est constante.

84. Les directrices des coniques qui ont un foyer commun et un point commun passent par un même point.

85. Discuter les courbes

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}, \quad y^2 = \frac{1}{x^2 + x^3}, \quad y^2 = x^3 - x^4.$$

86. Étudier géométriquement le lieu des projections d'un point donné sur les tangentes qu'on peut mener à un cercle. Tangente. Degré du lieu. Équation du lieu. Question analogue pour l'ellipse.

87. Lieu des centres des coniques qui passent par quatre points donnés.

88. L'équation d'une conique étant

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

si l'on fait $y = p$, on trouvera pour x l'abscisse du foyer.

89.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \ldots = 0, \quad A'x^2 + B'xy + C'y^2 + \ldots = 0$$

étant les équations de la même courbe dans deux systèmes différents de coordonnées rectangulaires, on a

$$A + C = A' + C' :$$

interprétation géométrique.

90. Lieu des sommets des angles de grandeur constante, circonscrits à une parabole.

91. OA et OB étant deux diamètres conjugués d'une ellipse, on abaisse BP perpendiculaire sur OA, et l'on prend BM égale à OA. Lieu des points M.

92. Deux côtés d'un triangle sont fixes; le troisième côté se meut de telle sorte que la surface du triangle reste constante. Lieu des points de concours des médianes.

93. Equation du cercle circonscrit à un triangle, dont chaque côté est donné par son équation.

94. Lieu des points tels, que si l'on mène deux tangentes à une parabole, la bissectrice de l'angle de ces tangentes fasse avec l'axe de la parabole un angle constant.

95. Étant données deux courbes

$$y = f(x), \quad y_1 = \varphi(x),$$

telles que $y^2 - y_1^2 = K^2$, trouver une relation entre les tangentes menées à ces deux courbes en deux points situés sur la même ordonnée.

96. Dans un triangle rectangle, le sommet de l'angle droit est fixe; un autre sommet se meut sur une droite à laquelle l'hypoténuse est perpendiculaire : trouver le lieu du troisième sommet.

97. Quelles sont les propriétés communes aux courbes

$$ax^2 + Kxy + by^2 + cx + dy + f = 0,$$

dans lesquelles K est un coefficient variable?

98. Lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur des ellipses concentriques semblables et semblablement placées.

99. Soient OA, OB, DE trois droites fixes. On mène par un point C pris sur DE une droite mobile qui rencontre OA et OB en F et G. Lieu des points d'intersection des droites DG et FE. Démontrer que le lieu est la polaire du point C par rapport à la conique formée de l'ensemble des deux droites OA et OB.

100. Soit FM un rayon vecteur d'une ellipse. On mène MP perpendiculaire sur le grand axe et l'on prend PN = FM. Lieu des points N.

101. Lieu des sommets des paraboles qui ont un point commun et le même foyer.

Géométrie analytique à trois dimensions.

102. On donne dans le même plan une circonférence et un point. Par ce point pris comme sommet, on mène un cône tangent à une sphère qui passe par la circonférence donnée. Trouver le lieu des courbes de contact quand on fait varier le rayon de la sphère.

103. Lieu des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux plans soit proportionnelle à leur distance à un troisième plan.

104. Discuter la surface

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2z = 0.$$

105. Lieu des points situés à égale distance d'un point fixe et d'un plan fixe.

106. Équation du paraboloïde hyperbolique rapporté à un de ses diamètres et aux deux génératrices rectilignes qui passent par le point où ce diamètre rencontre la surface.

107. Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux plans donnés est égale à un carré donné.

108. Dans quel cas un plan peut-il couper une surface du second ordre suivant une seule droite ?

109. Lieu des milieux des droites qui s'appuient sur deux droites données et qui restent parallèles à un plan donné.

110. $P = 0$, $P' = 0$ étant les équations d'une droite, que représente l'équation

$$F(P, P') = 0?$$

111. Peut-on faire passer une surface du second degré par deux coniques situées d'une manière quelconque dans l'espace ?

112. Un paraboloïde hyperbolique ayant un premier système de génératrices parallèles au plan horizontal, prouver que les projections verticales de toutes les génératrices du deuxième système passent par un même point.

113. Étant donnée une surface du second ordre, on mène par l'origine des coordonnées des droites telles que AB qui rencontre la surface en deux points A et B, puis sur la droite un point M tel que

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}\right);$$

trouver le lieu des points M. Généralisation du problème pour une surface de degré m : lieu des points M tels que

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \ldots + \frac{1}{OL}\right),$$

A, B,..., L étant les points où la droite menée par l'origine rencontre la surface.

114. Peut-on couper un paraboloïde hyperbolique de manière que la section soit une hyperbole équilatère ?

115. Lorsque deux sections circulaires d'une surface du deuxième ordre sont perpendiculaires entre elles, la surface est une sphère.

116. Lieu des points tels, que le produit de leurs distances à deux plans fixes ou à deux droites fixes soit constant.

117. Propriétés communes aux cercles représentés par l'équation

$$x^2 + y^2 + \lambda x + by + c = 0,$$

où λ est un paramètre variable. Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point (α, β) à ces circonférences. Propriété commune à toutes les cordes de contact.

118. Combien faut-il connaître de génératrices d'un cône du second degré pour qu'il soit déterminé?

119. Si $Q = 0$ est l'équation d'une sphère et $P = 0$ celle d'un plan, que représente l'équation

$$F(Q, P) = 0?$$

120. Les axes de coordonnées n'étant pas rectangulaires, à quelle espèce de plans est rapporté le paraboloïde qui a pour équation

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x.$$

121. Quand deux angles trièdres trirectangles ont même sommet, leurs six arêtes sont sur un même cône du second degré.

122. On peut faire passer quatre cônes par les points communs à deux surfaces du second degré.

123.

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \ldots = 0$$

étant l'équation d'une surface rapportée à des coordonnées rectangulaires, si l'on vient à changer d'axes, on aura

$$A + A' + A'' = \text{constante}.$$

Interprétation géométrique.

124. Sections circulaires de la surface

$$yx + yz + xz = 1.$$

125. Quelles relations y a-t-il entre les surfaces représentées par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) + k = 0 ?$$

126. Diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde.

127. Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface $xy = z$.

128. Lieu du sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipsoïde.

129. On a un ellipsoïde et une sphère concentriques : il y a un cône et trois cylindres qui passent par les points communs à ces deux surfaces. Les génératrices de ces trois cylindres sont perpendiculaires entre elles.

130. Lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à trois points fixes soit constante.

131. Étant donnés une surface du second ordre et un point fixe, on mène par ce point toutes les cordes dont ce point est le milieu. Lieu de ces droites.

132. Quand deux surfaces du second ordre ont un plan principal commun, l'intersection des surfaces se projette sur ce plan suivant une courbe du second degré.

(*La suite prochainement.*)

CORRESPONDANCE.

1. On a vu, par la table de 1863, que près de *cent cinquante* collaborateurs prennent part à la rédaction des *Nouvelles Annales*. Nous recevons donc beaucoup de lettres, et en général nous n'avons qu'à nous louer de la politesse de nos correspondants. Nous les remercions de leur zèle, de leurs conseils, de leurs critiques même; mais nous ferons remarquer à un petit nombre d'entre eux que la première politesse de celui qui écrit consiste à signer de son vrai nom, et nous sommes surpris que d'honnêtes jeunes gens oublient cette règle élémentaire du savoir-vivre. A l'avenir, nous regarderons comme non avenues les lettres non signées ou signées de pseudonymes. Les persónnes qui ne veulent pas être connues du public sont priées de nous en avertir et de nous communiquer leur adresse.

Les personnes qui résolvent une question sont priées de rappeler toujours en tête de leur solution le numéro de la question, ainsi que l'endroit où elle a été énoncée, et de transcrire l'énoncé en toutes lettres.

2. Un abonné nous demande pourquoi nous n'avons pas donné la biographie de Gergonne et celle de Gauss, que nous avions promises dans notre prospectus de 1863. Nous répondrons que nous en avons été empêchés par l'abondance des matières et par notre désir de faire participer à la publicité des *Annales* un plus grand nombre de nos collaborateurs. Mais tous nos documents sont réunis, et nous saisirons la première occasion de tenir notre promesse.

3. Notre savant ami, M. Hoüel, nous écrit de Bordeaux :

« Le théorème dit de M. Schlœmilch (*) a été démontré, il y a bien longtemps, par Cauchy. Je trouve (*Leçons sur le calcul différentiel*, 1829, 9e leçon, et Moigno, *Calcul différentiel*, t. I, p. 63) ceci :

» Le produit

$$m(n-m+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2} - m\right)^2$$

» croît évidemment avec le nombre entier m, depuis » $m = 1$ jusqu'à $m = \frac{n}{2}$, et comme on a, en conséquence,

$$1.n < 2(n-1) < 3(n-2) < \ldots < \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

» il en résulte

$$1.2.3\ldots n > n^{\frac{n}{2}}.\text{ »}$$

Nous ne demandons pas mieux que de restituer à Cauchy ce que nous avions attribué à M. Schlœmilch. Quant à la démonstration précédente, aussi ingénieuse que peu naturelle, elle porte le caractère distinctif des méthodes d'exposition de Cauchy. Le grand défaut de ces démonstrations si raffinées est d'échapper facilement à la mémoire, ce qui peut causer beaucoup d'embarras dans un examen.

M. Hoüel nous a communiqué, au sujet de la résolution des triangles, diverses remarques qui trouveront place dans notre prochain Rapport sur les compositions de 1863.

4. Le théorème de Cauchy peut être généralisé sans que la démonstration en devienne plus compliquée.

1° Dans toute progression arithmétique, le produit des termes à égale distance des extrêmes est plus grand que

---

(*) *Voir* 2e série, t. II, p. 273.

le produit des extrêmes, car

$$(a + pr)(l - pr) = al + pr(l - a - pr);$$

l est plus grand que $a + pr$; donc la dernière parenthèse est positive et le théorème est démontré.

2° Nous aurons dans toute progression

$$al = al, \quad bk > al, \quad cj > al \ldots$$
$$jc > al, \quad kb > al, \quad al = al,$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$a^2 b^2 c^2 \ldots l^2 > a^n l^n.$$

Ce théorème et la démonstration sont de M. Toubins, professeur à Lons-le-Saulnier.

5. *Extrait d'une lettre de M. Catalan.* — « Le problème des huit dames (question 251), proposé en 1852 par M. Lionnet, avait déjà occupé quelques joueurs d'échecs. En 1840, le *Schachzeitung* de Berlin en a publié plusieurs solutions, découvertes par différents amateurs. Dans le savant Traité cité en note (*), le géomètre russe donne l'analyse complète de ce difficile problème, qui admet *quatre-vingt-douze* solutions, dont douze seulement sont distinctes. C'est le résultat remarquable auquel était arrivé antérieurement M. Koralek, par une méthode empirique. »

6. A la page 270 du tome XX des *Nouvelles Annales*, on s'est proposé de trouver la direction des axes de la section plane d'un ellipsoïde; mais des erreurs de calcul ont conduit à une solution entièrement fausse et dont la fausseté est d'ailleurs évidente, puisque les formules trouvées ne contiennent pas les axes de l'ellipsoïde. Cette observation est de M. Beltrami.

(*) *Application de l'Analyse mathématique au jeu des échecs*, par C.-F. de Jaenisch, t. I[er], p. 123.

7. M. Brioschi a démontré, dans son Traité des déterminants, que la condition nécessaire pour qu'une équation du troisième degré ait deux racines égales est

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0;$$

s_0, s_1, s_2, etc., désignant des sommes de puissances semblables des racines de l'équation. M. Zbikowski, de Minsk, en Russie, nous adresse un article où il commente et simplifie la démonstration de M. Brioschi. Nous n'insérons pas le travail, encore assez long, de M. Zbikowski, parce que le théorème qu'il veut démontrer nous semble être une conséquence presque évidente des premiers principes relatifs aux déterminants. En effet, a, b, c étant les racines de l'équation proposée,

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

est la condition d'égalité de deux racines, puisque, d'après le théorème de Vandermonde, le premier membre est égal à $(a-b)(a-c)(b-c)$. Or, si l'on multiplie les trois lignes de ce déterminant : 1° par a^0, b^0, c^0; 2° par a^1, b^1, c^1; 3° par a^2, b^2, c^2, et qu'après chaque opération on ajoute les produits, colonne par colonne, on aura trois lignes qui pourraient remplacer les trois lignes du déterminant (2), ce qui donnera précisément l'égalité (1).

Des théorèmes analogues ont lieu pour les équations de tous les degrés, et l'on pourrait en couvrir des pages entières.

8. Nous avons reçu plusieurs tentatives de solutions de la question 61 : *Deux pyramides convexes, qui ont les*

faces triangulaires égales, chacune à chacune, et semblablement disposées, sont égales; mais toutes pèchent en un point. On oublie le cas où le pied de la hauteur tombe en dehors de la base. La démonstration relative au cas où le pied de la hauteur est dans l'intérieur de la base ne convient plus quand ce point est à l'extérieur, parce que les angles formés par les droites menées de ce point normalement aux côtés de la base peuvent tous augmenter sans que leur somme *algébrique* cesse d'être nulle.

9. *Extrait d'une lettre de M. Mannheim.* — « L'énoncé de la question 648 n'était probablement pas assez clair. La solution de cette question, insérée à la page 62 du numéro de février, est incomplète. MM. Jaufroid et Mansion trouvent, dans le cas général, une équation en ω *qui représente les parallèles aux asymptotes menées par l'origine, les rayons vecteurs tangents à la courbe et ceux qui passent par les points multiples.* Dans le cas du cercle, on ne trouve que les rayons vecteurs tangents, les parallèles aux asymptotes ont disparu, et, dans le cas de la conique (le pôle étant à l'un des foyers), c'est le contraire qui a lieu, ce sont les tangentes qui disparaissent.

» A quoi tiennent ces circonstances?

» Telle est la partie de la question 648 qui reste à résoudre.

» Enfin, si l'on se rend bien compte de la solution de ce dernier point, on répondra facilement à la dernière partie de mon énoncé : *Former des équations d'ordre supérieur au second qui présentent des circonstances analogues.* »

BULLETIN.

XII.

Lucas (Félix), ingénieur des Ponts et Chaussées. — *Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes*. In-8 de xx-240 pages et 2 planches. Paris, 1864; Mallet-Bachelier.

L'auteur s'est efforcé d'exposer, au moyen des procédés *classiques*, quelques théories nouvelles. « Les coordonnées de Descartes, dit-il, étant seules usitées dans nos lycées et dans nos écoles, la plupart des hommes spéciaux qui, par position ou par goût, s'adonnent à la science, ne renoncent pas volontiers à des procédés qui leur sont familiers, et peuvent reculer devant l'adoption des nouveaux artifices, si ingénieux qu'ils soient, de la Géométrie moderne. » Nous remarquerons à ce propos que nos classes de mathématiques spéciales ne sont pas des académies vouées aux questions curieuses et difficiles de la science : elles ont un but très-précis qu'elles doivent atteindre dans un temps limité. Il s'agit de mettre les élèves à même d'aborder l'étude du calcul infinitésimal et de la mécanique. On comprend dès lors que les coordonnées cartésiennes, employées presque exclusivement par les géomètres qui ont créé et développé ces deux sciences, doivent occuper la première place dans l'enseignement. Cela n'empêche point les professeurs de reconnaître les avantages des coordonnées trilinéaires dans quelques questions curieuses; ils en donnent une idée à leurs élèves, mais une étude approfondie et continue de ces nouveaux moyens d'investigation les éloignerait du but principal à atteindre.

M. Lucas a donc bien fait d'employer les coordonnées cartésiennes et de chercher par leur secours à généraliser plusieurs théories de la Géométrie analytique. Son ouvrage pourra être un utile auxiliaire de l'enseignement de nos écoles; car rien

n'est meilleur, pour l'intelligence d'une théorie, que d'en étudier une nouvelle plus générale. Nous regrettons seulement que M. Lucas se soit laissé aller à écrire des formules d'une grande complication, comme celles de la page 47. Quand des formules se compliquent à ce point, elles n'ont plus d'utilité, car on aura plus tôt fait d'aborder directement une question particulière, que d'en déduire la solution de l'expression générale.

L'ouvrage, divisé en sept livres, est terminé par un appendice et des notes. En voici les sommaires :

I. Diamètres. — Points remarquables et branches infinies. — II. Pôles et polaires. — Polaires diamétrales. — Courbes pivotantes. — III. Géométrie tangentielle. — Courbes roulantes. — Principe de dualité. — IV. Centres et axes des moyennes harmoniques. — Transversales et sommets. — V. Correspondance anharmonique. — Divisions segmentaires et tangentielles. — Homographie et involution. — VI. Génération anharmonique des courbes. — Intersection. — Courbes osculatrices. — Propriétés d'un système de points non situés en ligne droite. — Groupes associés sur les coniques. — Transformation des figures. — Appendice. — Description des courbes du troisième degré. — Notes I à X.

XIII.

CHASLES. — *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes données d'ordre quelconque ou satisfaire à d'autres conditions. Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions données; nombre des solutions dans chaque question.* In-4 de 16 pages. (Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* séances du 1er et du 15 février 1864.)

Cet important travail résout complétement, en donnant le nombre des solutions, le problème général de construire une conique qui satisfasse à cinq conditions consistant à passer par des points donnés, toucher des droites données ou des courbes

d'ordre quelconque. La méthode suivie donne lieu à une théorie fort étendue, susceptible de s'appliquer à la constrution de courbes de degré quelconque assujetties à satisfaire à un nombre convenable de conditions. La Note de M. Chasles ne contient que des considérations générales et des énoncés dont la démonstration sera donnée plus tard par l'illustre géomètre. Nous nous contenterons de donner ici les formules du nombre des solutions des divers problèmes. Dans le tableau suivant, P indique le nombre de points par lesquels doit passer la conique cherchée, D le nombre de droites qu'elle doit toucher, C le nombre des courbes qu'elle doit toucher, S le nombre des solutions, en supposant que S_1, S_2, S_3, etc., désignent les sommes des produits pris 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3... des nombres qui indiquent le degré des courbes C; enfin S′ donne le nombre des solutions dans le cas où les courbes de la colonne C sont des coniques.

	P	D	C	S	S′
I......	4	0	1	$S_1(S_1+1)$	6
II.. ..	3	1	1	$2S_1(S_1+1)$	12
III.....	2	2	1	$4S_1^2$	16
IV.....	1	3	1	$2S_1(2S_1-1)$	12
V.....	0	4	1	$S_1(2S_1-1)$	6
VI.....	3	0	2	$S_2(S_2+S_1+1)$	36
VII....	2	1	2	$2S_2(S_2+S_1-1)$	56
VIII...	1	2	2	$2S_2(2S_2-1)$	56
IX....	0	3	2	$S_2(4S_2-2S_1+1)$	36
X.....	2	0	3	$S_3(S_3+S_2+S_1-3)$	184
XI....	1	1	3	$2S_3(S_3+S_2-S_1)$	224
XII....	0	2	3	$S_3(4S_3-2S_1+3)$	184
XIII...	1	0	4	$S_4(S_4+S_3+S_2-3S_1+3)$	816
XIV...	0	1	4	$S_4(2S_4+2S_3-2S_2+3)$	816
XV....	0	0	5	$S_5(S_5+S_4+S_3-3S_2+3S_1)$	3264

Ainsi le nombre total des coniques tangentes à cinq coniques données est de 3264. Un géomètre allemand avait trouvé 7776.

Les formules V, IX, XII et XIV sont des cas particuliers de la formule XV, en supposant que certaines courbes se réduisent à des droites, ce qui rend leur degré égal à l'unité. De même IV, VIII et XI sont des cas particuliers de XIII; II est un cas particulier de VI, etc. P.

RECHERCHE DES POINTS MULTIPLES A L'INFINI DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES

(voir page 145);

PAR M. PAINVIN.

§ II. — *Points doubles à l'infini.*

VI. Je rappelle d'abord la classification des points doubles. En un point double, il y a deux tangentes; trois cas peuvent se présenter :

1° Les deux tangentes sont réelles. — *Point double ordinaire.*

2° Les deux tangentes sont imaginaires. — *Point double isolé.*

3° Les deux tangentes se confondent.
- I. *Point de rebroussement :* 1re espèce; 2e espèce
- II. *Point de rebroussement isolé.*
- III. *Contact de deux branches de la courbe.*

J'ajouterai cette remarque, que dans le rebroussement de deuxième espèce et dans le contact de deux branches, la tangente a un contact d'ordre plus élevé que dans le rebroussement de première espèce.

VII. Considérons toujours la direction asymptotique $y - ax = 0$ et le point à l'infini correspondant

$$\text{I}\quad \begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

Supposons qu'on ait [équation (5)]

$$\begin{cases} \varphi_n \;\; (1, a) = 0, \\ \varphi'_n \;\; (1, a) = 0, \\ \varphi_{n-1}(1, a) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(9) \quad (y - ax)^2 u_{n-2} + z(y - ax) v_{n-2} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0;$$

la valeur (6) de λ est alors indéterminée.

Une droite *quelconque* passant par le point I

$$y - ax = \lambda z$$

y rencontre la courbe en deux points coïncidents, car le premier membre de l'équation (9) est alors divisible par z^2 quel que soit λ; le point I est donc un point double.

Les deux tangentes proprement dites en ce point double s'obtiendront en déterminant λ de manière que le premier membre de l'équation soit divisible par z^3. D'après l'équation (5), nous aurons pour déterminer λ l'équation

$$(10) \qquad \frac{\lambda^2}{1.2} \varphi''_n(1, a) + \frac{\lambda}{1} \varphi'_{n-1}(1, a) + \varphi_{n-2}(1, a) = 0.$$

On a ainsi deux valeurs pour λ ; les deux tangentes en un point double à l'infini sont donc deux asymptotes parallèles; c'est visible *à priori*.

VIII. Discussion de l'équation (10).

1° Les deux racines de l'équation (10) sont réelles et inégales : on a un point double à l'infini dont les deux tangentes sont deux asymptotes parallèles à la droite

$$y - ax = 0.$$

2° Les deux racines sont imaginaires : on a un point double isolé à l'infini.

3° Les deux racines sont égales : on a à l'infini un point de rebroussement proprement dit ou un point de rebroussement isolé, suivant que les branches de courbe correspondant à cette direction asymptotique sont réelles ou imaginaires.

4° Une des racines est infinie : une des tangentes au point double est alors la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - ax)^3 u_{n-3} + z(y - ax) u_{n-2} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0.$$

5° Les deux racines sont infinies : les deux tangentes au point double se confondent avec la droite à l'infini ; on a un rebroussement à l'infini, et la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - ax)^3 u_{n-3} + z(y - ax)^2 v_{n-3} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0.$$

6° Lorsque le coefficient angulaire a a la valeur particulière $\sqrt{-1}$, l'équation de la courbe, si l'on suppose ses coefficients réels, se présentera alors sous la forme [d'après l'équation (9)]

$$(x^2 + y^2)^2 u_{n-4} + z(x^2 + y^2) u_{n-3} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0.$$

Les deux points circulaires à l'infini sont deux points doubles de la courbe. Ces points sont, il est vrai, imaginaires, et ne s'offriront pas dans la représentation réelle de la courbe. Mais, comme je l'ai fait remarquer au commencement, ils ont sur la classe de la courbe la même influence que les points doubles réels. Et on doit effectuer la recherche des points multiples imaginaires aussi bien que des points réels, si l'on veut connaître toutes les

causes de la diminution de la classe dans une courbe donnée.

Remarque. — Les tangentes proprement dites aux points doubles peuvent, comme dans le cas des points simples, avoir avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé que le premier.

§ III. — *Points multiples à l'infini.*

IX. Soit une direction asymptotique ($y - ax = 0$); l'équation d'une droite *quelconque*, passant par le point à l'infini I correspondant, sera

$$y - ax = \lambda z.$$

Si, après avoir remplacé y par la valeur que fournit cette équation, le premier membre de l'équation de la courbe est divisible par z^p, quel que soit λ, le point I sera un *point multiple d'ordre p*; car une droite *quelconque* y rencontre la courbe en p points confondus avec le point I.

Pour obtenir les tangentes proprement dites en ce point, il suffira de déterminer λ de manière que le premier membre de l'équation soit divisible par z^{p+1}; on obtiendra ainsi p asymptotes parallèles à la direction asymptotique considérée.

Les valeurs de λ seront données par l'équation obtenue en égalant à zéro le coefficient de z^p [équation (5)].

La discussion présentera des variétés du même genre que celles que nous avons rencontrées dans les points doubles; il n'y a là aucune difficulté théorique.

X. Je terminerai cette Note par l'examen des diverses particularités qui peuvent se présenter lorsque plusieurs directions asymptotiques viennent à coïncider.

Soit, par exemple,

$$\varphi_n(x, y) = (y - ax)^p u_{n-p};$$

cherchons les singularités qu'on pourra rencontrer au point à l'infini

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{array}\right.$$

1er Cas. — L'équation de la courbe est de la forme

$$\text{(I)}\quad (y - ax)^p u_{n-p} + z\varphi_{n-1} + z^2\varphi_{n-2} + z^3\varphi_{n-3} + \ldots = 0,$$

φ_{n-1} n'admettant pas le facteur $(y - ax)$.

Le point I est alors un point simple; l'asymptote est la droite à l'infini, laquelle a avec la courbe un contact du $(p-1)^{ième}$ ordre; ce cas a été discuté n° 5, remarque II.

2e Cas. — L'équation de la courbe est de la forme

$$\text{(II)}\left\{\begin{array}{l} (y - ax)^p u_{n-p} + z(y - ax)^{p-1} v_{n-p} \\ + z^2(y - ax)^{p-2} w_{n-p} + \ldots + z^{p-1}(y - ax) t_{n-p} \\ + z^p \varphi_{n-p} + z^{p+1}\varphi_{n-p-1} + \ldots + z^n \varphi_0 \end{array}\right\} = 0.$$

Le point I est alors un point multiple d'ordre p; car une droite *quelconque* passant par le point I y rencontre la courbe en p points coïncidents.

3e Cas. — Le degré d'un des termes précédant z^p est, par rapport à z et $(y - ax)$ à la fois, inférieur à p; ainsi l'équation serait de la forme

$$\text{(III)}\left\{\begin{array}{l} (y - ax)^p u_{n-p} + \ldots + z^k (y - ax)^{p-k-i} u_{n-p+i} + \ldots \\ \qquad + z^p \varphi_{n-p} + z^{p+1}\varphi_{n-p-1} + \ldots = 0, \end{array}\right.$$

le degré des termes qui précèdent z^k étant, par rapport à z et $(y - ax)$ à la fois, au moins égal à p.

Dans ce cas, le point $(z = 0,\ y - ax = 0)$ est un

point multiple d'ordre $(p - i)$, car une droite *quelconque* passant par ce point y rencontre la courbe en $(p - i)$ points coïncidents seulement, quel que soit λ.

En outre, la droite à l'infini touche la courbe au point I; car, en cherchant l'intersection de la courbe avec la droite à l'infini $z = 0$, on trouve

$$(y - ax)^p u_{n-p} = 0;$$

donc cette droite rencontre la courbe en p points confondus avec le point I: or, sur les $(p - i)$ points qui caractérisent le point multiple, il y en a un appartenant à la branche que touche la droite $z = 0$, et, comme cette droite a, en outre, $p - (p - i) = i$ points communs, j'en conclus qu'elle a avec la branche à laquelle elle est tangente proprement dite $(i + 1)$ points communs; donc *la droite à l'infini a avec la courbe un contact de l'ordre i*.

4[e] Cas. — L'équation de la courbe est de la forme

$$\text{(IV)} \quad (y - ax)^p u_{n-p} + z^p \varphi_{n-p} + z^{p+1} \varphi_{n-p-1} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire l'équation ne contient aucune des puissances de z inférieures à p.

Le point I est encore un point multiple d'ordre p; les p tangentes en ce point seront données par l'équation

$$\lambda^p u_{n-p}(1, a) + \varphi_{n-p}(1, a) = 0.$$

Cette équation a une seule racine réelle si p est impair, et elle n'a que deux racines réelles ou aucune racine réelle si p est pair; donc, par le point I $(z = 0, y - ax = 0)$, il peut ne passer aucune branche réelle de la courbe, ou il peut n'en passer qu'une seule, ou il peut en passer deux réelles au plus.

Ce qu'il faut ici remarquer, c'est que les asymptotes, correspondant aux autres points à l'infini, coïncident

avec les directions asymptotiques et ont avec la courbe un contact du $(p-1)^{ième}$ ordre.

Soit, en effet,

$$u_{n-p} = (y - a_1 x) u_{n-p-1};$$

cherchons l'intersection avec la courbe de la droite

$$y - a_1 x = \lambda z$$

passant par le point à l'infini $(z = 0, y - a_1 x = 0)$.

On a, d'après l'équation (IV)

$$\left.\begin{array}{l} [(a_1 - a)x + \lambda z]^p . \lambda z \\ \times [u_{n-p-1}(1, a_1) x^{n-p-1} + z x^{n-p-2} u'_{n-p-1}(1, a_1) + \ldots] \\ + z^p \varphi_{n-p}(x, a_1 x + \lambda z) + z^{p+1} \varphi_{n-p-1}(x, a_1 x + \lambda z) + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

On voit que pour obtenir la tangente au point

$$I_1(z = 0,\ y - a_1 x = 0),$$

il faudra faire $\lambda = 0$, pourvu toutefois que $\varphi_n(x, y)$ ou u_{n-p} ne contienne pas $(y - a_1 x)$ à une puissance égale à p; le premier membre de l'équation est alors divisible par z^p : c'est dire que la droite $y - a_1 x = 0$ a avec la courbe un contact du $(p-1)^{ième}$ ordre.

(La suite prochainement.)

THÉORÈMES SUR L'INTERSECTION D'UNE SPHÈRE ET D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. G. DARBOUX.

---

1. Si l'on coupe une surface quelconque du second degré par une sphère, la ligne d'intersection jouit des propriétés focales suivantes.

On peut trouver trois points sur la sphère tels, que si r, r', r'' désignent les distances d'un point quelconque de la courbe à ces trois points, on ait

$$ar + a'r' + a''r'' = 0,$$

a, a', a'' étant des constantes.

2. Ces points, que nous pouvons appeler des foyers de la courbe, se déterminent de la manière suivante :

On mène les quatre plans tangents communs à la sphère et à un des quatre cônes du second degré passant par la courbe d'intersection : on a quatre points de contact situés sur un petit cercle de la sphère. Trois quelconques de ces quatre points sont les points cherchés.

3. Puisque quatre cônes passent par la ligne d'intersection, on trouvera quatre groupes de foyers situés sur quatre petits cercles. Les plans de ces quatre petits cercles formeront un tétraèdre conjugué; par suite les cercles se couperont deux à deux à angle droit.

Les seize foyers ne peuvent être tous réels ; en effet, il y a toujours un des quatre cercles qui est imaginaire.

4. La projection stéréographique de la courbe d'intersection donne les ovales de Descartes. Il suffit de placer le point de vue en un quelconque des seize foyers. Il suit de là que les ovales de Descartes ont seize foyers disposés quatre à quatre sur trois cercles orthogonaux et sur une droite qui contient leurs centres, l'axe des ovales (*).

5. Les résultats précédents ont lieu quand on coupe par des sphères ou par des plans les surfaces réciproques des sur-

---

(*) Cette droite est la perspective du cercle qui passe par le point de vue : elle contient les trois points qu'on nomme plus particulièrement *foyers de la courbe*.

Si l'on transforme les ovales de Descartes par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle en un quelconque des seize foyers réels ou imaginaires, on a encore des ovales de Descartes.

faces du second ordre, en particulier le tore et la cyclide.

6. Extension du théorème de M. Dandelin. Coupons une surface de révolution du second degré par une sphère. Menons une seconde sphère tangente à la première et tangente en même temps à la surface de révolution en tous les points d'un parallèle. Il y a quatre sphères satisfaisant à ces conditions. Les quatre points de contact situés sur la sphère sécante appartiennent à un grand cercle. Prenons arbitrairement deux de ces points : on aura pour tout point de la courbe d'intersection

$$r + kr' = a,$$

r, r' désignant les distances du point de la courbe aux deux points choisis. On a ainsi sur la sphère l'analogue des ovales de Descartes. Au reste, la projection stéréographique de la courbe sphérique donne les ovales dans le plan (*).

7. Les ovales de Descartes ont une infinité de foyers situés sur une courbe plane du troisième degré dont le plan passe par l'axe et est perpendiculaire au plan des ovales. On a, entre les distances d'un point des ovales à deux points quelconques de cette courbe, une relation de la forme

$$\mu r + \mu' r' = \text{const.}$$

L'équation de la courbe du troisième degré est

$$y^2 = \frac{x(c+x)\left[\dfrac{a^2-c^2}{c} - x(1-n^2)\right]}{c + x(1-n^2)}.$$

8. La surface engendrée par la révolution des ovales

(*) Si la sphère se réduit à un plan, on a $k=1$, et $r+r'=a$. C'est le théorème de Dandelin étendu à une surface de révolution (*voir* Sauze, *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 33). Pour une autre extension de ce théorème, *voir* Chasles, *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 167.

de Descartes autour de leur axe n'admet pour sections planes que des cercles et des ovales de Descartes.

9. Nous avons vu que la courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'une sphère a seize foyers. Si par les quatre cercles orthogonaux qui contiennent ces seize foyers nous faisons passer quatre sphères orthogonales à la proposée et qui, par suite, seront orthogonales entre elles, sur chacune de ces sphères, il y aura une courbe qu'on pourra appeler focale; car trois points de cette courbe choisis arbitrairement seront trois foyers, c'est-à-dire qu'il y aura une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe à ces trois points. Cette courbe focale sera du quatrième degré, mais elle ne sera coupée qu'en quatre points par un petit cercle.

10. Menons une sphère quelconque qui coupe la sphère donnée suivant un petit cercle doublement tangent à la courbe d'intersection. La longueur de la tangente à cette sphère menée d'un point quelconque de la courbe s'exprimera par une équation de la forme

$$t = \mu r + \mu' r',$$

r, r' étant les distances du point à deux foyers situés sur la même courbe focale.

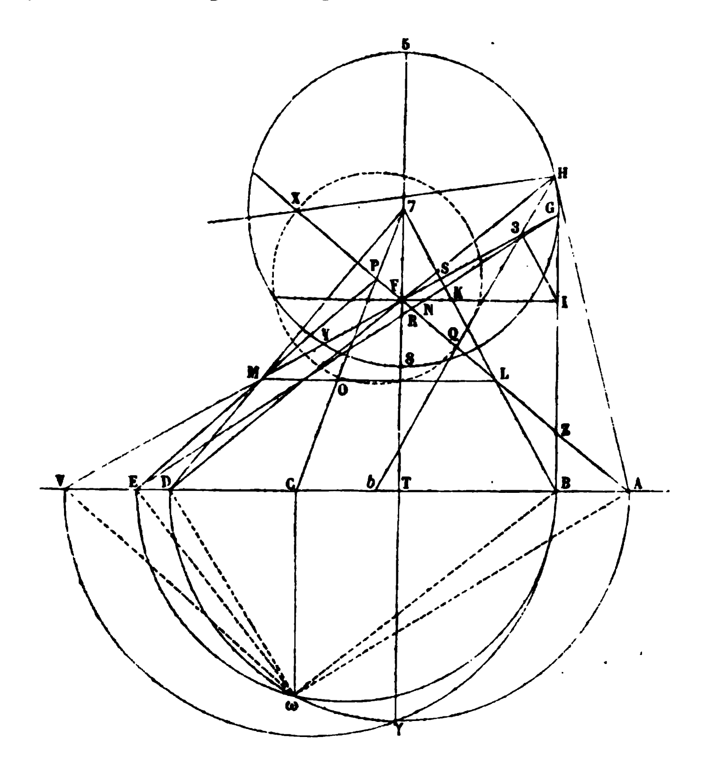
THÉORÈME DE DESARGUES (*);

Par M. POUDRA.

Soit HG8Y5 une conique quelconque, et dans son plan une droite AV. Soit F le pôle de cette droite relative-

(*) *Voir* les *Œuvres*, p. 215, fig. 19, et les *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 94 et 449.

ment à cette conique. La polaire d'un point quelconque A de cette droite AV sera la droite HFD passant par le point F et par les deux points de contact des tangentes menées du point A à la conique ; cette polaire rencontrera la droite AV



en un point D qui sera dit conjugué réciproque du point A, parce que la polaire FA de ce point D passe par le point A et réciproquement. A un autre point B de la droite AV correspondrait de même un point conjugué V, et ainsi de suite.

On peut donc concevoir sur la droite AV une série de couples de points conjugués, tels que A, D ; B, V ;..., relativement à la conique donnée. Ces points formeront une in-

volution. Si l'on prenait un point à l'infini sur la droite AV, son conjugué serait déterminé par le diamètre 578T, qui est la polaire de ce point, et l'on sait que le point T ainsi déterminé est le centre de cette involution.

Considérons maintenant sur la droite AF une série de couples de points en involution et ainsi formée. Sur la droite AF prenons d'abord deux points X et Q conjugués harmoniques des points A et F, c'est-à-dire tels qu'on ait

$$\frac{QF}{QA} = \frac{XF}{XA}.$$

On sait que chaque segment d'une involution est divisé harmoniquement par les deux points moyens. Or, comme les points X et Q divisent harmoniquement le segment AF, nous pouvons considérer ces deux points X et Q comme les deux points moyens de l'involution; de sorte que le point P, milieu du segment XQ, sera le centre de cette involution, et l'on aura

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PX}^2 = \overline{PA}.\overline{PF}.$$

Donc si sur QX comme diamètre on décrit une circonférence, chaque point de la droite AF, tel que Z, aura pour point conjugué de l'involution un point tel que R, situé sur la polaire du point Z relativement à cette circonférence, de sorte que ces points, Z et R, seront bien conjugués harmoniques des points X, Q et formeront sur AF une involution dont le centre sera le point P.

Voici maintenant l'énoncé du théorème de Desargues :

Si par une des extrémités Z d'un segment ZR de l'involution située sur AF, on mène à la conique la tangente ZG et qu'on joigne le point de tangence G avec l'autre extrémité R du segment, les deux droites GZ,

GR rencontreront la droite AV respectivement en deux points B et E. Si l'on prend, dans cette involution, un autre segment, on obtiendra par la même construction deux autres points analogues, et ainsi de suite; on voit donc qu'à chaque segment sur AF correspondra un segment sur AV: ainsi, lorsque le point Z sera en A, le point F étant le conjugué du point A, il en résultera que AD sera, sur AV, le segment correspondant à AF. Il s'agit de démontrer que les segments tels que BE, AD,..., ainsi déterminés, forment sur AV une seconde involution dont le centre C sera déterminé par la droite 7P qui joint le centre de la courbe au point P, milieu du segment XQ, et centre de l'involution située sur AF, comme on l'a vu plus haut.

Nous ferons d'abord remarquer que d'une extrémité Z d'un des segments on peut mener à la conique deux tangentes, et que par suite à un segment ZR il correspondra deux segments sur AV. On voit de même qu'à un segment tel que BE sur la droite AV correspondront deux segments sur AF.

On remarquera encore que les deux involutions situées sur AV auront en commun le segment AD qui ne correspondra sur AF qu'au seul segment AF.

La démonstration du théorème de Desargues repose sur quatre propositions préliminaires.

Première proposition. — Sur la droite AV considérons les deux segments AD, BV comme faisant partie de la première involution. Joignons le centre 7 de la conique aux points B et D et le point F aux points V et A; la droite 7B rencontre AF au point L, et la droite 7D rencontre VF au point M. Démontrer que la droite LM est toujours parallèle à la droite AV, quels que soient les deux segments AD, BV de l'involution.

Démonstration. — Le triangle VFT, coupé par la transversale 7MD, donne

$$\frac{7D}{7F} = \frac{DT}{DV} \cdot \frac{MV}{MF}.$$

De même, AFT, coupé par la transversale 7LB, donne

$$\frac{7T}{7F} = \frac{BT}{BA} \cdot \frac{LA}{LF}.$$

Donc on a

$$\frac{DT}{DV} \cdot \frac{MV}{MF} = \frac{BT}{BA} \cdot \frac{LA}{LF}.$$

Mais puisque le point T est le centre de l'involution des segments BV, AD, on a

$$TA.TD = TB.TV,$$

et comme

$$TA = TB + BA \quad \text{et} \quad TV = TD + DV,$$

on aura

$$(TB + BA)\,TD = TB\,(TD + DV)$$

ou

$$BA.TD = TB.DV$$

ou

$$\frac{DT}{DV} = \frac{BT}{BA};$$

on aura donc

$$\frac{MV}{MF} = \frac{LA}{LF},$$

c'est-à-dire que LM est parallèle à AV, ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième proposition. — Par le pôle F menons la droite FNKI rencontrant en N la droite GE, en K la

droite 7LB, en I la droite GZB. Par le point I traçons la droite I3 parallèle à 7LB et rencontrant en 3 la droite GFV. Démontrer qu'on a

$$EV.FK = FI.FN.$$

Démonstration. — D'abord, à cause des parallèles AV, FN, on a

$$\frac{GV}{GF} = \frac{EV}{FN}.$$

De même, à cause de I3 parallèle à SKB, on a

$$\frac{F3}{FS} = \frac{FI}{FK}.$$

Sur la droite GSPYMV les couples de points F, V; G, Y forment une involution dont le centre est le point S où la droite 7B rencontre la polaire GV du point B; il en résulte

$$\frac{GF}{YF} = \frac{GV}{YV},$$

d'où

$$\frac{GF + YF}{YF} = \frac{GV + YV}{YV} \quad \text{ou} \quad 2.\frac{SG}{YF} = 2\frac{YV + SY}{YV} = 2\frac{SY}{YV};$$

donc

$$\frac{SG}{YF} = \frac{SV}{YV} \quad \text{ou} \quad \frac{YF}{YV} = \frac{SG}{SV}.$$

Mais

$$\overline{SG}^2 = SF.SV, \quad \text{d'où} \quad \frac{SG}{SV} = \frac{SF}{SG};$$

donc

$$\frac{YF}{YV} = \frac{SF}{SG}.$$

Mais

$$\frac{GF}{YF} = \frac{GV}{YV} \quad \text{ou} \quad \frac{YF}{YV} = \frac{GF}{GV};$$

donc

$$\frac{SF}{SG} = \frac{GF}{GV}, \quad \text{ou} \quad \frac{GV}{GF} = \frac{SG}{SF} = \frac{GS}{SF}.$$

Desargues donne immédiatement ce dernier résultat comme une des propriétés de l'involution.

A cause de FI parallèle à VA, on a

$$\frac{GB}{GI} = \frac{GV}{GF},$$

et, à cause de SB parallèle à I3,

$$\frac{GB}{GI} = \frac{GS}{G3} = \frac{GV}{GF}:$$

donc

$$\frac{GS}{SF} = \frac{GS}{G3},$$

d'où résulte que

$$G3 = SF \quad \text{et, par suite,} \quad GS = F3.$$

Ainsi on a

$$\frac{EV}{FN} = \frac{GV}{GF} = \frac{SG}{SF} = \frac{F3}{FS} = \frac{FI}{FK},$$

d'où

$$EV.FK = FN.FI,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Troisième proposition. — Les trois points P, M, E sont en ligne droite.

Démonstration. — Comme conséquence de l'involution qui existe sur AF on a

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AZ}{FZ} \cdot \frac{AR}{FR};$$

mais les deux triangles semblables ARE, FRN donnent

$$\frac{AR}{FR} = \frac{AE}{FN};$$

les triangles AZB, FZI donnent pareillement

$$\frac{AZ}{FZ} = \frac{AB}{FI}.$$

Donc on a

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AZ}{FR} \cdot \frac{AR}{FR} = \frac{AE}{FN} \cdot \frac{AB}{FI};$$

mais par la deuxième proposition

$$FN.FI = EV.FK,$$

donc

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AE.AB}{EV.FK};$$

mais à cause des triangles semblables ALB, FLK et AFV, FLM on a

$$\frac{AB}{FK} = \frac{LA}{LF} = \frac{MV}{MF},$$

donc

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AE}{EV} \cdot \frac{MV}{MF}:$$

c'est la propriété du triangle AFV coupé par la transversale EMP aux points E, P, M, qui sont ainsi en ligne droite.

Quatrième proposition. — Démontrer qu'on a

$$CA.CD = CB.CE = \ldots,$$

et qu'ainsi ces segments forment sur AV une involution dont le point C est le centre.

Démonstration. — De ce que ML est parallèle à AV, les trois droites 7MD, 7OC, 7LB donnent

$$\frac{OL}{OM} = \frac{CB}{CD},$$

et les trois droites PME, POC, PLA, dont le sommet P

est sur la même droite γPC, donnent aussi

$$\frac{OL}{OM} = \frac{CA}{CE};$$

donc

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE},$$

d'où

$$CA.CD = CB.CE = \ldots.$$

Telle est donc la démonstration de ce théorème important de Desargues, théorème qui, je crois, a échappé jusqu'ici aux géomètres. En voici maintenant les conséquences.

La réciproque de cette proposition serait celle-ci :

Étant donnée une conique HG8Y5 et une droite AV dans son plan, on détermine d'abord sur cette droite les couples de points A, D; B, V;..., conjugués relativement à la conique et formant sur AV une involution dont le centre est le point T. Étant donnée ensuite sur cette même droite AV une autre involution quelconque dont le centre serait un point tel que C, on demande de trouver : 1° le segment commun à ces deux involutions; 2° les couples de points, sur AF polaire d'une des extrémités de ce segment commun, formant sur cette droite une involution; 3° de déterminer le centre P de cette involution et les deux points moyens X et Q qui, dans l'exemple, sont réels, mais qui peuvent être imaginaires.

Pour déterminer le segment commun AD aux deux involutions, il suffit de remarquer que toutes les demi-circonférences décrites sur les segments d'une même involution, comme diamètres, passent par un même point. Ainsi les demi-circonférences décrites sur AD, BV,... comme diamètres passent par le même point γ. De même, celles

qu'on décrit sur AD, BE,..., de la seconde involution passent par le même point ω. Donc la demi-circonférence qui passera par les deux points γ et ω déterminera le segment commun AD.

AF sera la polaire de l'extrémité D de ce segment et DF celle de l'autre extrémité A.

Pour avoir sur AF les couples de points tels que Z, R qui forment sur cette droite une involution, on voit qu'il suffit, par une des extrémités B d'un des segments de la seconde involution, de mener à la conique une tangente BG qui rencontrera la polaire AF au point Z, puis de joindre le point de tangence G à l'autre extrémité E du segment, et cette droite GE rencontrera AF au point R conjugué de Z. Et ainsi pour les autres.

En joignant le centre 7 de la courbe au point C centre de la seconde involution, cette droite 7C rencontrera AF au point P centre de l'involution sur AF.

Les deux points moyens X et Q se détermineront par la propriété

$$\overline{PX}^2 = \overline{PQ}^2 = PF.PA = PR.PZ = \ldots.$$

Ici se trouve une observation importante : c'est que si le point P se trouve du même côté de chaque segment RZ, AF,..., les deux points moyens de l'involution sont, comme on le sait, tous les deux réels; mais si, au contraire, il était engagé entre les extrémités d'un des segments, auquel cas il le serait pour tous, alors, dans ce cas, les deux points moyens seraient imaginaires; c'est ce qui arrive en effet pour le point d'intersection de la droite 7C avec DF qui se trouve entre les extrémités du segment DF. Ainsi, il y aurait aussi sur DF, comme sur AF, une involution, mais sur DF les deux points doubles sont imaginaires; et il est facile de voir que, quelle que soit

la position du point C, il y aura toujours une des deux, et une seulement, pour laquelle les deux points doubles seront réels.

Une autre observation à faire, c'est que la droite AV peut avoir, par rapport à la conique, trois positions distinctes : 1° être extérieure à la courbe, comme dans la figure ; 2° couper la courbe, et 3° lui être tangente. Nous venons de voir que, lorsque cette droite est extérieure, il y a deux points X et Q réels, et deux points imaginaires. Si la droite AV coupait la courbe et devenait dans la figure la droite VF, auquel cas VF deviendrait VA, le point F devenant le point A et réciproquement, alors l'involution sur VA, qui est donnée, deviendrait une involution sur VF, de manière que le centre C d'involution deviendrait un point de cette droite, et alors la droite qui joint ce point au centre de la courbe déterminerait de même sur AF le point P qui serait de même le centre d'une involution dont les points moyens X et Q seraient réels, tandis que cette même droite rencontrerait AV, dans l'ancien point C compris entre les extrémités d'un segment, et, par conséquent, les points doubles de l'involution située sur AV seraient imaginaires.

Enfin, si la droite AV était tangente à la courbe au point T, alors les points F, 8, A se trouveraient réunis en T, point qui serait une des extrémités commune à tous les segments de la première involution AD, BV,...; par conséquent, le segment AD commun aux deux involutions aurait ce point T pour une de ses extrémités, et alors la polaire AF de son autre extrémité D serait une droite passant aussi par ce point T, et le point T serait le point double Q de l'involution déterminée sur cette polaire ; le centre de l'involution serait toujours le point P déterminé par l'intersection de cette polaire et de la

droite γ C qui joint le centre γ de la courbe avec le centre C de la seconde involution située sur AV; de sorte que le second point double X serait de l'autre côté de P relativement à Q et à une distance PQ = PT.

Applications.

Étant donné un cône ayant pour base la conique donnée; étant donnée la direction d'un plan sécant, on demande de trouver, sur la base du cône, le point qui deviendra le centre de la section; les droites qui deviendront des diamètres conjugués; celles qui deviendront les axes; les droites qui deviendront les tangentes et les normales à la courbe; enfin les points qui deviendront les foyers.

Par le sommet ω de ce cône, on mène un plan parallèle au plan sécant : il coupera le plan de la base suivant une droite AV, laquelle, relativement à la base du cône, peut avoir trois positions : être extérieure à la courbe, la couper en deux points, ou être tangente.

Rabattons, sur le plan de la base, le plan mené par le sommet en le faisant tourner autour de AV comme charnière; le sommet du cône se rabattra en un point quelconque ω de ce plan.

Sur cette droite AV on commence par déterminer la série de couples de points A, D; B, V;..., conjugués relativement à la base. En décrivant sur chacun des segments AD, BV,..., comme diamètres des demi-circonférences, elles se couperont toutes en un point γ, et la perpendiculaire γT à AV déterminera le centre T de l'involution formée par ces segments.

Du point ω, qui représente le sommet du cône, on abaisse sur AV la perpendiculaire ωC et on regarde ce point C comme le centre d'une autre involution située sur AV, et dont les points conjugués A, D; B, E;...,

soient tels, que l'on ait

$$\overline{\omega C}^2 = CA.CD = CB.CE = \ldots.$$

Puisque la longueur $C\omega$ est connue, on pourra donc avoir autant qu'on voudra de couples de points de cette involution; toute demi-circonférence dont le centre sera sur la droite AV et qui passera par le point ω déterminera, par ses intersections avec la droite AV, deux de ces points.

Connaissant les deux points ω et γ, celle de ces circonférences qui passera en même temps par ω et γ donnera les deux extrémités A et D du segment commun aux deux involutions.

La polaire de l'extrémité D de ce segment sera la droite AF, celle de l'autre extrémité A sera DF. Ces deux droites se coupent en F qui est le pôle de la droite AV relativement à la conique. Par ce point F passeront toutes les cordes de contact des deux tangentes menées à la conique, d'un même point quelconque de la droite AV, et de plus chacune de ces cordes passant par F et prolongée jusqu'à la droite AV sera divisée harmoniquement par ses deux points d'intersection avec la conique.

On joint le centre γ de la courbe au centre C de la deuxième involution située sur AV; cette droite rencontrera la droite AF, ou DF, en un point P tel, que les points A et F ou D et F soient du même côté du point P. Dans la figure, c'est sur la droite AF que se trouve ce point.

Sur la droite AF on détermine les points conjugués tels que Z, R d'une involution dont le point P est le pôle. Pour cela, par une des extrémités B d'un des segments BE de l'involution située sur AV et dont C est le centre, on mène la tangente BG rencontrant AF en Z, puis on joint le point de tangence G avec l'autre extré-

mité E de ce segment; la droite GE rencontrera AF au point R conjugué de Z, et ainsi de suite pour les autres segments de cette involution.

Connaissant sur AF les segments qui forment une involution dont P est le centre, il sera facile de déterminer les points doubles X et Q de cette involution; il suffit de prendre X et Q tels que

$$\overline{PX}^2 = PQ^2 = PR.PZ = PF.PA = \ldots.$$

Toutes ces constructions achevées, observons que le plan mené par le sommet étant parallèle au plan sécant, il en résulte que toute droite joignant le sommet ω du cône avec un des points quelconques de la trace AV de ce plan sera parallèle au plan sécant, c'est-à-dire ne le rencontrera qu'à l'infini, et qu'ainsi la droite indéfinie AV donnera dans le plan sécant naissance à une droite à l'infini. Par suite, tout faisceau de droites du plan de la base du cône, qui a son sommet en un point tel que A de la droite AV, donnera dans le plan sécant naissance à un faisceau de droites parallèles entre elles et de plus parallèles à la droite ωA qui joint le sommet du cône à ce point A. De même, le faisceau de droites dont D serait le sommet donnera naissance à un faisceau de droites parallèles à ωD, et l'angle formé par les directions de ces deux faisceaux de droites parallèles sera égal à celui des deux droites ωA, ωD qui joignent le sommet du cône aux deux sommets A et D des faisceaux primitifs. Si l'angle de ces deux droites est droit, l'angle de ces deux directions sera donc aussi droit.

D'après cela, il est évident :

1° Que la droite qui joint le sommet ω du cône avec le point F percera le plan sécant au centre de la courbe;

2° Que deux droites telles que BF, VF, qui joignent le point F à deux points B et V conjugués dans l'involution

dont T est le centre, donneront deux diamètres conjugués dont l'angle sera égal à l'angle VωB;

3° Que les deux droites FA, FD, qui joignent le point F aux deux extrémités A et D du segment commun aux deux involutions, donneront les axes de la courbe;

4° Que les droites telles que GB, GE, dont l'une est la tangente à la base au point G et l'autre est la droite qui joint le point G au point E conjugué de B dans l'involution dont le centre est C, donneront naissance à deux droites dont la première sera une tangente à la courbe de section au point correspondant à G; de plus, que cette tangente sera parallèle à la droite ωB, la seconde sera une droite parallèle à ωE : or, comme les deux points B, E de la seconde involution sont les extrémités de demi-circonférences passant par ω, il s'ensuit que ces deux droites ωB, ωE sont toujours rectangulaires; il en résulte que si la droite GB reste une tangente à la courbe, la droite correspondante à GE sera la normale.

5° Enfin les droites qui joignent le sommet ω du cône aux points X et Q perceront le plan en des points qui seront les foyers de la section.

En effet, les points X et Q divisent harmoniquement les segments tels que AF, ZR,.... Donc, si on joint le point tel que H de la courbe aux points X, Q, F, A, ces quatre droites formeront un faisceau harmonique qui donnera naissance dans la section à un autre faisceau harmonique; les droites HF, HA auront pour correspondantes des droites qui seront parallèles aux droites ωD, ωA qui sont rectangulaires, donc elles seront aussi rectangulaires. Mais dans un faisceau harmonique, si deux des droites conjuguées du faisceau sont rectangulaires, les deux autres doivent être les bissectrices des deux premières. De même, si, en un autre point quelconque G de la base, on mène la tangente GZB, puis qu'on joigne ce point G aux quatre points

X, Q, B, E, on obtiendra un faisceau harmonique auquel correspondra dans la section un autre faisceau harmonique; les deux droites correspondantes à GB et à GE seront l'une la tangente et l'autre la normale, et par suite celles qui correspondent à GX et à GQ seront les deux bissectrices de l'angle de cette tangente et de cette normale, et cela ayant lieu pour tous les points de la courbe, il en résulte que les points correspondants à X et à Q sont les foyers de la courbe.

Si la droite AV est extérieure à la base, on obtient pour la section une ellipse. Si elle coupe la base, on aura une hyperbole, puisque les deux points où cette droite coupe la courbe passent à l'infini; les tangentes en ces deux points de la base deviendront les asymptotes de la section. Les foyers seront toujours les points correspondants aux points X et Q, et seront situés dans la partie concave de la courbe. Si la droite AV était tangente à la base en T, ce point T passant à l'infini avec le point double Q, on obtiendrait une parabole dont l'un des foyers serait à l'infini.

Outre les foyers réels sur l'un des axes de la section, il y en a deux imaginaires sur l'autre axe.

Enfin, en prenant pour base du cône un cercle, on voit que par cette admirable proposition de Desargues, on peut déduire les propriétés des sections coniques des propriétés connues du cercle qui forme la base du cône.

DU CONTACT DES COURBES PLANES,

et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Parmi les questions relatives au contact des courbes planes, les premières qui se présentent, dès qu'on sort des contacts simples, sont les suivantes :

Étant donné un *réseau* de courbes du degré m, assujetties à $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ (*) conditions communes, combien d'entre elles :

1° Touchent deux courbes données?

2° Touchent en deux points une courbe donnée?

3° Ont avec une courbe donnée un contact du second ordre?

Ces questions, sauf le cas où $m = 2$ (**), n'ont pas été, je crois, encore résolues d'une manière générale, même dans le cas le plus simple où les courbes données sont des lignes droites, et où les conditions qui déterminent le réseau sont des points communs à toutes les courbes qui le composent.

Toutefois, il est un cas particulier où les géomètres ont

(*) On sait qu'une courbe du degré m est déterminée par $\frac{m(m+3)}{2}$ conditions.

(**) La théorie des sections coniques est en effet beaucoup plus avancée, grâce aux remarquables travaux publiés récemment par M. Chasles dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séances des 1er et 15 février et 7 mars 1864).

réussi à surmonter les difficultés du problème : c'est celui où les courbes du réseau sont les *polaires premières* de tous les points du plan relatives à une seule et même courbe fixe tracée dans le plan, qui serait ici, par conséquent, du degré $(m+1)$ (*).

Avant d'aborder les contacts multiples des sections coniques, je vais traiter un autre cas particulier des questions ci-dessus énoncées, qui ne me paraît pas avoir encore été examiné. Je veux parler de celui où les courbes du réseau d'ordre m, indépendantes d'ailleurs de toute subordination de polarité, ont en commun un point multiple d'ordre $(m-1)$, et, en outre, $2(m-1)$ autres points simples, ce qui équivaut à $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points communs. Ce sera un pas de plus fait vers la solution, encore désirée, du cas plus général où les courbes du réseau ont en commun $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points simples.

La solution que je présente dérive immédiatement de l'emploi de la méthode de transformation des figures, qui a fait le sujet d'un Mémoire récemment inséré par moi dans les *Nouvelles Annales* (**). Dans ce mode de transformation, à toute droite de l'une quelconque des deux figures, il correspond, dans l'autre, une courbe d'ordre m, douée, en un point fixe, d'un point multiple d'ordre $(m-1)$ et passant par $2(m-1)$ autres points invariables; et, à une courbe d'ordre n, il correspond, dans l'autre figure, une courbe d'ordre mn douée de $2(m-1)$ points multiples d'ordre n, ainsi que d'un point multiple d'ordre $n(m-1)$, lesquels équivalent ensemble, comme

(*) Chasles, Cours de la Sorbonne, 1857. — Cremona, *Introduzione ad una teoria delle curve piane*, p. 79; 1862.

(**) Livraison de mars 1864, p. 97.

on sait, à

$$2(m-1).\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(m-1)[n(m-1)-1]}{2}$$
$$=\frac{n(m-1)(mn+n-3)}{2}$$

points doubles.

D'après cela, les trois questions proposées plus haut (si l'on désigne, pour abréger, par r et r' les degrés des transformées des courbes données C^n, $C^{n'}$, et par D et D' les nombres respectifs de leurs points doubles) se réduisent aux suivantes, savoir :

1° Quel est le nombre N des tangentes communes aux deux courbes transformées C^r, $C^{r'}$?

2° Quel est le nombre T des tangentes doubles de C^r?

3° Quel est le nombre I des tangentes d'inflexion de C^r?

Or, on sait, par la théorie des courbes, qu'il existe, entre les nombres r, r', D, D' et ceux qu'on cherche, les relations

$$N=[r(r-1)-2D][r'(r'-1)-2D'],$$
$$T=\frac{1}{2}r(r-2)(r^2-9)-2D(r^2-r-6)+2D(D-1),$$
$$I=3r(r-2)-6D.$$

Si l'on y substitue à r, r', D, D', les valeurs données dans le Mémoire cité, savoir :

$$r=mn,\quad r'=mn',\quad D=\frac{n(m-1)(mn+n-3)}{2},$$
$$D'=\frac{n'(m-1)(mn'+n'-3)}{2},$$

on trouve, après quelques réductions très-simples, les trois formules

1° $\qquad nn'(n+2m-3)(n'+2m-3),$

2° $$\frac{1}{2}n^2\overline{(n+2m-3)}^2 - n(5n+6m-15),$$

3° $$3n(n+m-3),$$

qui répondent, respectivement, aux trois questions proposées.

Si l'on y fait $m=2$, elles conviennent à des coniques passant par trois points donnés. Les deux dernières deviennent, dans cette hypothèse,

$$\frac{n(n-1)}{2}(n^2+3n-6),\quad 3n(n-1),$$

et ont été déjà données par quelques géomètres, qui les ont démontrées d'une manière différente.

Avant d'obtenir ces deux formules, relatives à un réseau de sections coniques qui passent par trois points fixes, au moyen de la méthode de transformation dont je viens de donner une application plus générale, j'y avais été moi-même conduit il y a longtemps par une autre voie, moins rigoureuse à la vérité, mais qui a l'avantage d'ouvrir un accès vers les questions d'un ordre plus élevé, où il s'agit des contacts multiples des sections coniques avec une seule et même courbe donnée. Je me bornerai à énoncer ici les formules principales auxquelles on parvient ainsi. Elles sont exactes, je crois; mais on pourra, si l'on veut, n'y voir qu'une première indication propre à guider dans des recherches définitives sur ce sujet très-ardu.

Formules exprimant le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions dénommées.

I. Passer par deux points et toucher une courbe C^n en trois points distincts :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}(n^3+6n^2-19n-12).$$

II. Passer par un point et toucher une courbe en quatre points distincts :

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n^4+10n^3-37n^2-118n+282).$$

III. Toucher une courbe en cinq points distincts :

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$
$$\times(n^5+15n^4-55n^3-495n^2+1584n-35).$$

Par exemple, il y a 1135 coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième ordre.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE DESCARTES A MERSENNE,

DU 8 OCTOBRE 1629.

COUSIN, t. VI, p. 56.

« De diviser les cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement, mais non point géométriquement ; il est vrai qu'il se peut en 27, par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent trouver le moyen, mais non pas en 29, et si l'on m'en veut envoyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir que cela n'est pas exact. »

Quelle peut être cette division du cercle en 27 parties par le moyen d'un cylindre ? S'agit-il de figures décrites à l'aide d'un compas sur une surface cylindrique ?

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 533

(voir tome XIX, page 248);

PAR M. NESTOR PLISSART (DE LIÉGE).

Soient deux cercles égaux dans le même plan; P *un point variable duquel on mène des tangentes aux cercles, et dont le produit est constant. Le lieu de ces points est la podaire du centre d'une ellipse.*

Cet énoncé me semble trop général, et je crois que cette propriété n'est vraie que dans un cas particulier. Soient en effet les deux cercles C et C′ égaux et P un point tel, que le produit des tangentes PR, PR′ menées de ce point aux deux cercles soit égal à la quantité donnée k^2. Je prends pour axe des x la droite CC′ et pour axe des y la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite. Soit r le rayon des deux cercles; je représente OC par α.

On a

$$\text{PR} \times \text{PR}' = k^2$$

$$\sqrt{\overline{\text{PC}}^2 - r^2} \times \sqrt{\overline{\text{PC}'}^2 - r^2} = k^2$$

$$\overline{\text{PC}}^2 \times \overline{\text{PC}'}^2 - r^2\left(\overline{\text{PC}}^2 + \overline{\text{PC}'}^2\right) + r^4 = k^4,$$

x et y étant les coordonnées du point P :

$$\begin{gathered}[(x-\alpha)^2 + y^2] \\ \times [(x+\alpha)^2 + y^2)] - r^2(2x^2 + 2\alpha^2 + 2y^2) + r^4 = k^4,\end{gathered}$$

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 = x^2(2r^2 + 2\alpha^2) + y^2(2r^2 - 2\alpha^2) \\ - (\alpha^2 - r^2)^2 + k^4. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation du lieu du point P; la symétrie de la courbe par rapport aux axes montre suffisamment que si cette équation représente la podaire du centre d'une ellipse, ce centre ne peut être que l'origine, et les axes de cette ellipse doivent coïncider avec les axes des coordonnées. Or l'équation de la podaire du centre d'une ellipse, rapportée aux axes de celle-ci, est

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

Pour identifier cette équation avec l'équation (A), je dois poser

$$a^2 = 2r^2 + 2\alpha^2$$
$$b^2 = 2r^2 - 2\alpha^2$$
$$k^4 = (r^2 - \alpha^2)^2$$

ou

$$\pm k^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Pour que l'équation (A) représente la podaire du centre d'une conique, il faut que l'équation de condition $\pm k^2 = r^2 - \alpha^2$ soit satisfaite.

Si $r < \alpha$, on prendra pour k^2 le signe inférieur, et l'équation (A) nous donne la podaire du centre d'une hyperbole, car b^2 est négatif; c'est le cas où les deux cercles donnés par l'hypothèse sont extérieurs l'un à l'autre.

Si $\alpha = r$, c'est-à-dire si les deux cercles se touchent extérieurement, $k = 0$ et l'équation (A) se réduit à

$$(x^2+y^2)^2 = 4r^2x^2,$$

ou

$$x^2+y^2 = \pm 2rx,$$

équation qui représente les deux cercles donnés.

Si $r > \alpha$, les deux cercles se coupent, et l'équation (A) est celle de la podaire du centre d'une ellipse. Si la condition $\pm k^2 = r^2 - \alpha^2$ n'est pas satisfaite, l'équation (A) ne

peut plus représenter la podaire du centre d'une conique; elle ne peut même pas représenter la podaire d'aucun point du plan de cette conique. Car, comme il est facile de s'en convaincre, aucune podaire, elliptique ou hyperbolique, hormis celle du centre de la courbe, n'admet de centre de figure; tandis que l'origine est évidemment un centre de la courbe représentée par l'équation (A).

Voyons maintenant ce qu'exprime la condition

$$\pm k^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Elle exprime que le carré donné k^2 est égal au carré de la tangente menée de l'origine à l'un des cercles, c'est-à-dire, que l'origine est un point du lieu. Si l'on a $r > \alpha$, l'origine est à l'intérieur des deux cercles; la tangente menée par l'origine est imaginaire; k^2 est le carré de cette tangente pris positivement, et l'origine est un point isolé de la courbe; en passant aux coordonnées polaires, l'équation devient

$$\rho^2 = (2r^2 + 2\alpha^2)\cos^2\omega + (2r^2 - 2\alpha^2)\sin^2\omega.$$

Si l'on a $\alpha > r$, l'origine au lieu d'être un point isolé est un point quadruple, l'équation polaire de la courbe est

$$\rho^2 = \cos^2\omega\,(2r^2 + 2\alpha^2) - \sin^2\omega\,(2\alpha^2 - 2r^2).$$

Les asymptotes de l'hyperbole génératrice touchent la podaire à l'origine.

Question 663;

PAR MM. H. PICQUET ET MAX. CORNU,
Élèves de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans

un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre. (BELTRAMI.)

On sait que si l'on considère dans un plan un triangle ABC et les centres o, o', o'', o''', des cercles inscrit et exinscrits, le triangle formé par trois quelconques des centres est tel, que le quatrième est le point de rencontre de ses hauteurs, et le cercle des neuf points de ce dernier triangle passe par les milieux des six droites qui joignent les quatre centres deux à deux et par les sommets du triangle ABC. D'ailleurs, ce cercle est le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les quatre centres o, o', o'', o'''; car, bien qu'une hyperbole équilatère soit déterminée par quatre points, comme toute hyperbole équilatère passant par trois des centres passe par le quatrième qui est le point de rencontre des hauteurs du triangle des trois premiers, il en passe une infinité par les quatre centres; d'autre part, toute courbe du second degré passant par les quatre centres est une hyperbole équilatère. Il en résulte donc que la courbe du second degré passant par les points milieux des six droites qui joignent deux à deux les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC, et par les sommets du triangle ABC, est le lieu des centres des courbes du second degré passant par les centres de ces cercles.

Il est donc naturel, pour démontrer le théorème proposé qui est analogue au précédent dans l'espace, de chercher l'équation d'une surface du second degré passant par les centres des huit sphères inscrite et exinscrites au tétraèdre; il restera dans son équation deux indéterminées, car toute surface du second degré passant par sept des centres passera par le huitième, et il faut neuf points pour la déterminer; on cherchera le lieu des centres de ces surfaces, ce qui donnera trois équations entre les-

quelles on éliminera les deux indéterminées, et l'on obtiendra l'équation de la surface du troisième degré cherchée.

Pour trouver l'équation de la surface du second degré passant par les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre, nous nous servirons d'une propriété énoncée dans le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* du R. Salmon, p. 113.

Si dans l'équation d'un hyperboloïde on suppose que la somme des coefficients de x^2, y^2 et z^2 soit nulle, cet hyperboloïde passe par le centre de la sphère inscrit dans un tétraèdre conjugué de la surface, et par conséquent par les sept autres centres que rien ne distingue analytiquement du premier. Ce tétraèdre est tel, que tout sommet est le pôle de la face opposée par rapport à la surface.

Soient donc

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0, \quad P''' = 0$$

les quatre faces du tétraèdre; l'équation d'un hyperboloïde, par rapport auquel il serait conjugué, est de la forme

$$aP^2 + bP'^2 + cP''^2 + dP'''^2 = 0,$$

car le cône $aP^2 + bP'^2 + cP''^2 = 0$ coupe la surface suivant le plan $P'''^2 = 0$, c'est-à-dire lui est tangent, et la ligne de contact est située dans le plan $P''' = 0$. Donc le sommet du cône, qui est évidemment un des sommets du tétraèdre, est le pôle du plan P'''. Soient alors

$$\begin{aligned}
P &= \alpha x + \beta y + \gamma z + p,\\
P' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + p',\\
P'' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + p'',\\
P''' &= \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + p''',
\end{aligned}$$

les coefficients des variables étant les cosinus des angles que la normale à chaque plan fait avec les axes. Si nous exprimons que la somme des coefficients de x^2, y^2 et z^2

est nulle, nous aurons la relation

$$a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+b(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+c(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)$$
$$+d(\alpha'''^2+\beta'''^2+\gamma'''^2)=0$$

ou

$$(1)\qquad a+b+c+d=0.$$

La surface passera alors par les huit centres, et si nous prenons les équations du centre, nous aurons

$$(2)\qquad a.P\alpha+b.P'\alpha'+c.P''\alpha''+d.P'''\alpha'''=0,$$
$$(3)\qquad a.P\beta+b.P'\beta'+c.P''\beta''+d.P'''\beta'''=0,$$
$$(4)\qquad a.P\gamma+b.P'\gamma'+c.P''\gamma''+d.P'''\gamma'''=0.$$

Le résultat de l'élimination de a, b, c, d, entre les équations homogènes (1), (2), (3), (4), sera l'équation

$$(S)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P\alpha & P'\alpha' & P''\alpha'' & P'''\alpha''' \\ P\beta & P'\beta' & P''\beta'' & P'''\beta''' \\ P\gamma & P'\gamma' & P''\gamma'' & P'''\gamma''' \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente bien une surface du troisième degré passant par les arêtes du tétraèdre; car si l'on fait, par exemple, $P=0$, $P'=0$, deux colonnes du déterminant deviennent identiques et l'équation est satisfaite.

Il faut faire voir maintenant que les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des sphères inscrites se trouvent sur la surface. Pour cela, prenons deux centres quelconques; chacun d'eux est donné par l'intersection de trois des plans bissecteurs de trois des dièdres du tétraèdre; comme, dans les équations de chaque face, les coefficients des variables sont les cosinus des angles que la normale fait avec les axes, les plans bissecteurs s'obtiendront en prenant des sommes ou des différences d'équations de deux faces. Considérons, par

exemple, la droite qui joint les centres

$$\left\{\begin{array}{l} P - P' = 0, \\ P - P'' = 0, \\ P - P''' = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} P + P' = 0, \\ P + P'' = 0, \\ P + P''' = 0. \end{array}\right.$$

Les plans qui les déterminent sont des plans bissecteurs intérieurs ou extérieurs suivant la position de l'origine, et comme nous ne précisons rien là-dessus, il en résulte que rien ne distingue analytiquement la droite $\left\{\begin{array}{l} P' - P'' = 0 \\ P'' - P''' = 0 \end{array}\right.$ qui les joint des vingt-sept autres, sauf une restriction que nous verrons plus loin, et la proposition sera démontrée si nous faisons voir que son milieu est sur la surface. A cet effet, cherchons l'intersection de la droite $\left\{\begin{array}{l} P' - P'' = 0 \\ P'' - P''' = 0 \end{array}\right.$ avec la surface (S); pour cela, dans l'équation de celle-ci, remplaçons P' et P''' par P'', il vient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P\alpha & P''\alpha' & P''\alpha'' & P''\alpha''' \\ P\beta & P''\beta' & P''\beta'' & P''\beta''' \\ P\gamma & P''\gamma' & P''\gamma'' & P''\gamma''' \end{vmatrix}$$

$$= P''^2 \left\{ P'' \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma' & \gamma''' \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \right\}.$$

La solution $P''^2 = 0$, $P' = 0$, $P''' = 0$, qui donne un sommet du tétraèdre, n'est pas celle qui nous convient; nous voyons seulement que deux points d'intersection de la droite et de la surface se sont réunis en un seul. Si nous désignons par Δ et δ les deux déterminants du second membre, les coordonnées du point d'intersection seront

fournies par les équations

$$P' = P'', \quad P''' = P'',$$
$$P''\Delta + P\delta = 0$$

ou, en ordonnant,

$$(\alpha''\Delta + \alpha\delta)x + (\beta''\Delta + \beta\delta)y + (\gamma''\Delta + \gamma\delta)z + p''\Delta + p\delta = 0,$$
$$(\alpha' - \alpha'')x + (\beta' - \beta'')y + (\gamma' - \gamma'')z + p' - p'' = 0,$$
$$(\alpha'' - \alpha''')x + (\beta'' - \beta''')y + (\gamma'' - \gamma''')z + p'' - p''' = 0.$$

Le dénominateur commun des valeurs de x, y, z est

$$\begin{vmatrix} \alpha''\Delta + \alpha\delta & \beta''\Delta + \beta\delta & \gamma''\Delta + \gamma\delta \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' \end{vmatrix},$$

qu'on peut écrire

$$\Delta \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' \end{vmatrix}$$
$$+ \delta \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de Δ peut se simplifier : pour cela, ajoutons la première rangée à la seconde, et retranchons-la de la troisième, il viendra

$$\begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ -\alpha''' & -\beta''' & -\gamma''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{vmatrix} = \Delta.$$

Quant au coefficient de δ, il peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' & 1 \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Ajoutons à la première colonne la dernière multipliée par α'', à la seconde la dernière multipliée par β'' et à la troisième la dernière multipliée par γ'', nous aurons

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \\ -\alpha''' & -\beta''' & -\gamma''' & -1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 1 \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & 1 \end{vmatrix} = -\delta .$$

Le dénominateur commun est donc $\Delta^2 - \delta^2$.

Le numérateur de x s'obtiendra en remplaçant, dans les coefficients de Δ et de δ, α, α', α'', α''' par p, p', p'', p''', ce qui donne

$$x = -\frac{\Delta\Delta_\alpha - \delta\delta_\alpha}{\Delta^2 - \delta^2}$$

et, par symétrie,

$$y = -\frac{\Delta\Delta_\beta - \delta\delta_\beta}{\Delta^2 - \delta^2}, \quad z = -\frac{\Delta\Delta_\gamma - \delta\delta_\gamma}{\Delta^2 - \delta^2}.$$

Nous allons faire voir que ces valeurs représentent les demi-sommes des coordonnées des centres considérés.

On aura les coordonnées du premier centre, en résolvant les équations

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z + p - p' = 0,$$
$$(\alpha - \alpha'')x + (\beta - \beta'')y + (\gamma - \gamma'')z + (p - p'') = 0,$$
$$(\alpha - \alpha''')x + (\beta - \beta''')y + (\gamma - \gamma''')z + p - p''' = 0.$$

Leur dénominateur commun sera

$$\begin{vmatrix} \alpha - \alpha' & \beta - \beta' & \gamma - \gamma' \\ \alpha - \alpha'' & \beta - \beta'' & \gamma - \gamma'' \\ \alpha - \alpha''' & \beta - \beta''' & \gamma - \gamma''' \end{vmatrix},$$

qu'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma-\gamma' \\ 0 & \alpha-\alpha'' & \beta-\beta'' & \gamma-\gamma'' \\ 0 & \alpha-\alpha''' & \beta-\beta''' & \gamma-\gamma''' \end{vmatrix},$$

et, en retranchant la première rangée de toutes les autres,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ -1 & -\alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ -1 & -\alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \\ -1 & -\alpha''' & -\beta''' & -\gamma''' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix}$$

ou

$$-\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} = -(\Delta+\delta).$$

Le numérateur de x sera évidemment

$$-(\Delta_\alpha + \delta_\alpha),$$

de sorte que

$$x = -\frac{\Delta_\alpha + \delta_\alpha}{\Delta+\delta}, \quad y = -\frac{\Delta_\beta + \delta_\beta}{\Delta+\delta}, \quad z = -\frac{\Delta_\gamma + \delta_\gamma}{\Delta+\delta}.$$

Pour avoir les coordonnées de l'autre centre, il suffit de changer de signe les lettres accentuées, ce qui donne

$$x' = -\frac{\delta_\alpha - \Delta_\alpha}{\delta-\Delta}, \quad y' = -\frac{\delta_\beta - \Delta_\beta}{\delta-\Delta}, \quad z' = -\frac{\delta_\gamma - \Delta_\gamma}{\delta-\Delta},$$

d'où

$$\frac{x+x'}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha + \delta_\alpha}{\delta+\Delta} + \frac{\delta_\alpha - \Delta_\alpha}{\delta-\Delta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{2\delta_\alpha\delta - 2\Delta_\alpha\Delta}{\delta^2-\Delta^2} = -\frac{\Delta\Delta_\alpha - \delta\delta_\alpha}{\Delta^2-\delta^2},$$

$$\frac{y+y'}{2}=-\frac{\Delta\Delta_\beta-\delta\delta_\beta}{\Delta^2-\delta^2},\quad \frac{z+z'}{2}=-\frac{\Delta\Delta_\gamma-\delta\delta_\gamma}{\Delta^2-\delta^2}.$$

C. Q. F. D.

Il est bon de remarquer que sur les vingt-huit droites seize seulement jouissent de la propriété de passer par un sommet du tétraèdre, et il en passe quatre par chaque sommet. La droite à laquelle nous venons d'appliquer le calcul se trouve dans ce cas, et nous avons vu qu'au sommet par où elle passe deux de ses points d'intersection avec la surface se sont réunis en un seul; elle n'est pas pour cela tangente, car la surface présente à chaque sommet un point singulier; en ce point un cône du second degré lui est tangent : car si nous faisons $P'=x$, $P''=y$, $P'''=z$, l'équation de la surface se réduit, comme il est facile de le voir, à

$$xyz+(\alpha x+\beta y+\gamma z+p)(\alpha yz+\beta zx+\gamma xy)=0,$$

et le cône $\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=0$ est tangent à la surface à l'origine; nous voyons qu'il renferme les trois arêtes aboutissant à l'origine, et non les droites telles que

$$\begin{cases} x-z=0, \\ y-z=0. \end{cases}$$

Quant aux douze autres droites, le calcul du point milieu, bien qu'un peu différent du précédent, lui est pourtant analogue, et il n'est pas nécessaire de le répéter. Le dénominateur commun des valeurs de $x, y, z,$ au lieu d'être une différence de carrés de déterminants, serait une différence de carrés de différences de déterminants. Chacune de ces douze droites s'appuie sur deux arêtes opposées du tétraèdre; car si, par exemple, nous considérons la droite

$$\begin{cases} P=P', \\ P''=P''', \end{cases}$$

et que nous remplacions P' par P et P''' par P'' dans l'équation de la surface, nous obtenons le facteur PP'', ce qui fournit les solutions

$$\begin{array}{ll} P = 0, & P = P', \\ P' = 0, & P'' = 0, \\ P'' = P''', & P''' = 0; \end{array}$$

donc la droite rencontre les arêtes opposées

$$\begin{cases} P = 0, \\ P' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} P'' = 0, \\ P''' = 0. \end{cases}$$

Nota. — Ce théorème se rattache intimement à un théorème de M. Painvin (*Propriétés du système des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraède fixe*, p. 32, théorème XVII) dont voici l'énoncé :

Lorsque les surfaces conjuguées passent par un point fixe, le pôle d'un plan fixe décrit une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre. Les sommets du tétraèdre sont des points doubles de la surface.

Son équation est

$$Ax_0^2 yzt + By_0^2 xzt + Cz_0^2 xyt + Dt_0^2 xyz = 0,$$

x, y, z, t représentant les quatre faces du tétraèdre. On voit donc qu'elle est de même forme que celle que nous avons trouvée. Dans le cas qui nous occupe, le point fixe est le centre d'une sphère inscrite; le centre des surfaces conjuguées, qui est le pôle d'un plan qui s'est éloigné indéfiniment, décrira alors, d'après le théorème de M. Painvin, une surface du troisième degré qui est celle dont nous avons trouvé l'équation.

Note du Rédacteur. — C'est par erreur que nous avons indiqué M. Picquet comme ayant démontré la seconde égalité de la question 681 (p. 73) pour des angles quelconques. M. Picquet ne l'avait démontrée que pour des angles dont la somme est égale à $(2n+1)\pi$.

Question 680

(voir 2e série, t. II, p. [illegible]);

Par M. LAISANT,
Lieutenant du génie.

Étant donnée une courbe quelconque sur une sphère, si d'un point O *de la sphère on mène l'arc de grand cercle* OA *coupant en* A *la courbe, et qu'on prolonge* OA *en* A′ *de manière qu'on ait* $\dfrac{\sin \dfrac{OA'}{2}}{\sin \dfrac{OA}{2}} = m$, *le lieu du point* A′ *sera une seconde courbe qu'on peut appeler courbe semblable à la première. Démontrer que les surfaces déterminées par ces deux courbes sont entre elles comme* m^2 *est à* 1. (Vannson.)

Soient OBB′ un arc de grand cercle infiniment rapproché de OAA′ et AB, A′B′ deux arcs de petits cercles perpendiculaires au diamètre de la sphère qui passe par le point O. En prenant les surfaces OAB, OA′B′ pour surfaces élémentaires des courbes, on ne néglige que des infiniment petits du deuxième ordre, comme il est aisé de le voir. Mais OA′B′, OAB sont évidemment proportionnels aux calottes sphériques qui auraient les cercles A′B′, AB pour bases, ou aux hauteurs de ces zones. Donc

$$\frac{OA'B'}{OAB} = \frac{1 - \cos OA'}{1 - \cos OA} = \left(\frac{\sin \dfrac{OA'}{2}}{\sin \dfrac{OA}{2}} \right)^2 = m^2.$$

Si ce rapport m^2 existe entre des éléments correspondants quelconques des deux courbes, il existe donc entre les sommes de ces éléments, c'est-à-dire entre les aires entières. C. Q. F. D.

QUESTIONS D'EXAMEN (1863). (Fin.)

Physique et Chimie.

133. *Appareil de M. Morin.* — Comment pourra-t-on étudier les lois de la chute des corps au moyen de la courbe décrite, quelle qu'elle soit d'ailleurs. Montrer *à priori* que la courbe doit être tangente, au point A origine du mouvement, à l'horizontale passant par ce point? Étant donnée la courbe $y = f(x)$, que faut-il pour que la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x représente la vitesse?

134. Comparaison des durées de deux phénomènes à l'aide du pendule.

135. La fontaine de Héron fournit une vérification très-simple du principe de Pascal sur la transmission des pressions.

136. Description de l'électroscope. Qu'arrivera-t-il si l'on interpose entre l'électroscope et le conducteur une plaque conductrice ou non conductrice?

137. Théorie de l'électroscope condensateur. Usage de cet instrument et précautions à prendre en l'employant. Est-il nécessaire d'appliquer une couche de vernis sur chaque plateau? A quoi tient le plus ou moins de sensibilité de l'appareil?

138. Analogies du chlore et de l'iode. Comment prépare-t-on le chlorate et l'iodate de potasse?

139. Principe d'Archimède. Vérification expérimentale. Que se passerait-il si, la balance supportant le liquide, on y plongeait un corps soutenu par un point extérieur?

140. Propriété de l'acide fluorhydrique. Quelles espèces de lut doit-on employer pour souder les parties des appareils qui servent à cette préparation?

141. Étant donnée une boussole d'inclinaison, placer son limbe de manière que l'aiguille magnétique se place verticalement.

142. Préparation de l'hydrogène protocarboné. Indiquer la réaction par l'acétate de soude. Analyse de ce corps. Feu grisou. Salzes.

143. Acide azotique. Production de vapeurs rutilantes au commencement et à la fin de la préparation. Purification de l'acide azotique du commerce.

144. Limite d'épuisement de la machine pneumatique.

Errata.

Question 84 (p. 179). — Au lieu de *un point commun*, lisez *deux points communs*.

Question 115 (p. 183). — Au lieu de *deux*, lisez *trois*. (A traiter indépendamment de la théorie générale des sections circulaires, en prenant les trois plans pour plans coordonnés.)

Question 129 (p. 184). — *Un cône et un cylindre*, ajoutez *du second degré*.

BULLETIN.

XIV.

Aoust (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. — *Recherches sur les surfaces du second ordre*. Première partie. In-8 de IV-60 pages. Paris, Mallet-Bachelier.

Description et propriétés des lignes de courbure des surfaces

du second ordre. — Des sphères doublement tangentes aux surfaces du second ordre. — Transformation des figures planes en figures ellipsoïdales. — Propriétés focales.

Si on laisse de côté la partie relative aux lignes de courbure, sujet qui exige des notions de calcul différentiel, le reste de l'ouvrage peut être entendu par un bon élève de Mathématiques spéciales.

XV.

Dupuis (Jean), censeur au lycée de Metz. — *Recueil de Tables propres à abréger les calculs.* In-18 de LX-160 pages. 1861. — *Tables de logarithmes à cinq décimales*, d'après *J. de Lalande.* In-18 de XII-220 pages. 1863. — *Tables de logarithmes à sept décimales*, d'après *Callet, Végu, Bremiker, etc.* 2e tirage. In-8 de XII-580 pages. 1863. Librairie Hachette.

Les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques sont calculés depuis longtemps. Une nouvelle Table de logarithmes ne peut donc différer des précédentes que par une plus grande correction et par diverses améliorations que suggère l'expérience. Voici les principaux avantages que M. Dupuis signale dans ses Tables à sept décimales :

1° Chaque page des logarithmes des nombres contient 50 lignes et non 60. Cette disposition offre l'avantage qu'une fois le livre ouvert à la page convenable, on peut, sans avoir besoin de lire les chiffres, trouver immédiatement l'endroit de la page où se trouve le logarithme cherché. 2° Lorsque la troisième décimale d'un logarithme change, au lieu de briser la ligne, comme fait Callet, M. Dupuis avertit de ce changement par des étoiles qui précèdent dans tout le reste de la ligne la quatrième décimale de chaque logarithme. 3° Les parties proportionnelles des différences sont données à un dixième près de l'unité du dernier ordre. 4° Les logarithmes des lignes trigonométriques ont leurs caractéristiques exactes : $\bar{1}$, $\bar{2}$, etc., au lieu de 9, 8, etc. 5° Les lignes trigonométriques sont placées dans l'ordre symétrique :

sin, tang, cotang, cos, et les marges contiennent les parties proportionnelles des différences des logarithmes, comme dans les excellentes Tables de M. Hoüel.

On a rejeté pour toutes ces Tables l'usage des chiffres anglais, ou d'égale hauteur, dont les inconvénients ont été signalés par M. Bailleul, l'habile prote.

Dans la partie trigonométrique, M. Dupuis n'a point répété le premier chiffre d'une partie décimale commune à toute une colonne, en sorte qu'il faut aller chercher ce chiffre en haut ou en bas de la page. Cette disposition nous paraît incommode, et nous aimerions mieux que ce chiffre fût répété à chaque ligne ou au moins de dix lignes en dix lignes.

M. J. Dupuis a certainement profité des observations faites sur les Tables de Callet par MM. Terquem, Lefort, Hoüel, dans ce journal même : nous regrettons de ne pas trouver ces noms indiqués dans l'Avertissement. Cependant, mieux inspiré que M. Saigey, M. Dupuis n'a point maltraité ses devanciers. (*Voyez* la Notice de M. Lefort sur la nouvelle édition de Callet, par M. Saigey, *Bulletin de bibliographie*, 1861, p. 68.)

Enfin, signalons un heureux effet de la publication nouvelle, qui a fait tomber de 15 francs à 8 francs le prix de l'ouvrage. C'est tout profit pour le public auquel on faisait payer le double de sa valeur un objet de première nécessité.

XVI.

Bellavitis. — Elementi... *Éléments de Géométrie, de Trigonométrie et de Géométrie analytique*, exposés d'une manière facile et expéditive, pour servir d'introduction à la Géométrie descriptive. Premier fascicule. In-8 de XII-196 pages. Padova, 1862.

Cet ouvrage, d'une grande clarté, se borne aux notions les plus simples et les plus indispensables à ceux qui veulent apprendre la Géométrie descriptive. Ce qui doit le faire rechercher par les géomètres, c'est une exposition du *calcul des équivalents*, calcul inventé par l'auteur qui en a fait de très-heureuses applica-

tions. Cette méthode n'était exposée jusqu'ici que dans des Mémoires faisant partie de collections peu répandues hors de l'Italie.

XVII.

Roberts (William). — *Sur un système de courbes et de surfaces dérivées, et en particulier sur quelques surfaces analogues aux ellipses de Cassini.* In-4 de 24 pages. (Extrait des *Annales de Tortolini*, t. IV, 1862.)

Extension aux surfaces de la théorie des podaires successives; — podaires à indices fractionnaires.

XVIII.

Roberts (William).—*Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales.* In-4 de 12 pages. (Extrait du *Journal de Crelle*, t. LXIII.)

On y trouve, entre autres, ce théorème : « Étant donnée une série d'ellipsoïdes homofocaux, soit un point pris arbitrairement sur l'un des axes, et considérons ce point comme le sommet de cônes circonscrits aux ellipsoïdes du système homofocal. Le lieu des courbes de contact sera une surface déterminée, et, en faisant varier la position du sommet sur le même axe, on aura une série de surfaces renfermant un paramètre arbitraire. Pareillement, deux autres systèmes, dont chacun contient un paramètre arbitraire, s'obtiennent de la même manière, en prenant des points situés sur les deux autres axes pour sommets de cônes circonscrits. Les surfaces qui appartiennent à ces trois systèmes se coupent mutuellement deux à deux à angles droits. »

M. Roberts nous a adressé, au sujet de ce théorème, un article qui paraîtra prochainement.

RECHERCHE DES POINTS MULTIPLES A L'INFINI DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES

(voir page 193);

PAR M. PAINVIN.

§ IV. — *Exemples.*

XI. — Je vais maintenant indiquer plusieurs courbes faciles à construire complétement, et présentant les diverses particularités que je viens de signaler.

J'appliquerai aux deux premiers exemples la méthode générale que je viens de développer.

XII. — 1° Soit la courbe

$$2yx^3 - y^2 - x = 0,$$

ou, en rendant l'équation homogène,

$$(1) \qquad 2yx^3 - y^2z^2 - xz^3 = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$yx^3 = 0.$$

Étudions d'abord le point à l'infini I ($y = 0$, $z = 0$) : l'axe des x est la direction asymptotique. Pour cela, cherchons l'intersection de la courbe (1) par la droite quelconque passant par ce point

$$(2) \qquad y = \lambda z;$$

on a

$$(3) \qquad 2\lambda x^3 z - xz^3 - \lambda^2 z^4 = 0;$$

donc une droite quelconque passant par le point ($y = 0$,

$z = 0$) ne rencontre la courbe qu'en un seul point, car le premier membre de l'équation (3) n'admet que le facteur z; donc le point I est un *point simple*. Exprimons que la droite (2) est tangente : il faut faire pour cela $\lambda = 0$, et le premier membre de l'équation (3) est divisible par z^3; donc la droite ($y = 0$) rencontre la courbe au point simple I en trois points coïncidents; le point I à l'infini est donc un *point d'inflexion*, la droite $y = 0$ est la tangente d'inflexion.

Étudions le point J ($x = 0$, $z = 0$) : l'axe des y est la direction asymptotique. Pour cela, cherchons l'intersection de la courbe (1) par la droite quelconque passant par le point J

(4) $$\lambda x - z = 0;$$

on a, en remplaçant z par λx,

(5) $$-\lambda^2 y^2 x^2 + 2yx^3 - \lambda^3 x^4 = 0;$$

le premier membre de l'équation (5) est divisible par x^2 quel que soit λ, le point J est donc un *point double*. Pour que la droite (4) soit tangente, il faut annuler le coefficient de x^2, ce qui donne $\lambda^2 = 0$; ainsi, au point double J, les deux tangentes proprement dites se confondent avec la droite $z = 0$; donc le point J est un *point de rebroussement*; la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. Lorsqu'on fait $\lambda = 0$, le premier membre de l'équation (5) devient divisible par x^3, et seulement par x^3; c'est donc un rebroussement de première espèce.

XIII. — 2° Soit la courbe

$$y^3 - y^2 - x = 0,$$

ou, en rendant l'équation homogène,

(1) $$y^3 - y^2 z - x z^2 = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$y^3 = 0.$$

On a donc la seule direction asymptotique $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des x; le point à l'infini correspondant I est ($y = 0$, $z = 0$). Cherchons l'intersection de la courbe (1) par une droite quelconque passant par ce point

(2) $$\lambda y - z = 0.$$

(Je prends ici, comme dans le second cas de la courbe précédente, $\lambda y - z = 0$ au lieu de $y - \lambda z = 0$; c'est qu'en prenant cette seconde forme on est conduit à une valeur infinie pour λ; la première forme est alors plus commode pour la discussion, et on pourra constater, dans l'étude des autres courbes, l'utilité de cette remarque.)

Cherchons l'intersection de la droite (2) avec la courbe (1), on a

(3) $$-\lambda^2 x y^2 - \lambda y^3 + y^3 = 0.$$

Le premier membre de l'équation (3) est divisible par y^2, quel que soit λ; le point I est donc un *point double*. Pour que la droite (2) soit tangente, il faut annuler le coefficient de y^2, ce qui conduit à $\lambda^2 = 0$; ainsi, au point double I, les deux tangentes proprement dites se confondent avec la droite $z = 0$; le point I est donc un *point de rebroussement*: la tangente de rebroussement est la droite à l'infini, parallèle à la direction asymptotique. Lorsqu'on fait $\lambda = 0$, le premier membre de l'équation (3) est et ne peut être divisible que par y^3; c'est un rebroussement de première espèce.

XIV. — *Exemples.*

(I) $$2yx^3 - y^2 - x = 0.$$

Un point d'inflexion à l'infini, la direction asymptotique

est l'axe des x, la tangente d'inflexion est l'axe des x. Un point double à l'infini, dont les deux tangentes se confondent avec la droite à l'infini, c'est-à-dire un point de rebroussement dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique ; la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de neuvième classe.

(II) $$y^3 - y^2 - x = 0.$$

Un point double à l'infini, dont les deux tangentes se confondent avec la droite à l'infini, c'est-à-dire un point de rebroussement dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des x. Courbe de troisième classe.

(III) $$x^3 - 2xy + y^2 = 0.$$

Un point d'inflexion à l'infini, la tangente d'inflexion est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des y. Point double à l'origine. Courbe de quatrième classe.

(IV) $$xy^2 - y^2 - x = 0.$$

Un point d'inflexion à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Un point double à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Courbe de quatrième classe.

(V) $$x^2 y^2 + (y - x)^3 = 0.$$

La droite à l'infini est une tangente double, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y. Un point triple à l'origine dont les trois tangentes se confondent, une seule branche est réelle. Courbe de quatrième classe.

(VI) $$x^2 y^2 (y - x)^2 - (x + y)^5 = 0.$$

La droite à l'infini est une tangente triple, les directions

asymptotiques sont l'axe des x, l'axe des y, et la bissectrice des axes. L'origine est un point quintuple dont les cinq tangentes se confondent, une seule branche est réelle. Courbe de sixième classe.

$$\text{(VII)} \qquad x(x+y)^2 + 3y(x+y) + 2x = 0.$$

Un point double à l'infini, dont les asymptotes sont à des distances finies et réelles, la direction asymptotique est la deuxième bissectrice des axes. Un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de quatrième classe.

$$\text{(VIII)} \qquad x(x+y)^2 + 4y(x+y) + 4x = 0.$$

Un point de rebroussement à l'infini, la direction asymptotique est la deuxième bissectrice des axes. Un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de troisième classe.

$$\text{(IX)} \qquad x(x+y)^2 + y(x+y) + x = 0.$$

Un point double isolé à l'infini, la direction asymptotique est la deuxième bissectrice des axes. Un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de quatrième classe.

$$\text{(X)} \qquad y^2(x-1)^2(x-3) = 1.$$

Un point triple à l'infini, dont fait partie un point de rebroussement isolé, la direction asymptotique est l'axe des y. Un point de rebroussement réel à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Courbe de dixième classe.

$$\text{(XI)} \qquad y^3 - xy + x = 0.$$

Un point double à l'infini, dont une des tangentes est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des x. Courbe de quatrième classe.

(XII) $$x^4 - 2x^2y + y^3 = 0.$$

Point simple à l'infini, la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique; cette tangente a avec la courbe, en ce point, un contact du troisième ordre; la direction asymptotique est l'axe des y. Un point triple à l'origine. Courbe de sixième classe.

(XIII) $$(x^2+y^2)^2 + 2x(x^2+y^2) - x^2 = 0.$$

Les deux points circulaires à l'infini (points imaginaires) sont des points doubles de la courbe. L'origine est un point de rebroussement. Courbe de cinquième classe.

(XIV) $$x^2y^2 + 3x^2y + y^2 - 4x^2 = 0.$$

Un point double isolé à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Un point double à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Un point double à l'origine. Courbe de sixième classe.

(XV) $$x^2y^2 + 2y(x^2 - y^2) + x^2 = 0.$$

Un point simple à l'infini dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des y. Un point de rebroussement isolé à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Un point de rebroussement à l'origine. La courbe est de sixième classe.

(XVI) $$x^2y^2 + 2xy(x+2y) + (x-2y)^2 = 0.$$

Deux points de rebroussement à l'infini, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y. Un point de rebroussement à l'origine. Courbe de troisième classe.

(XVII) $$xy^3 - y + 1 = 0.$$

Un point triple à l'infini dont les trois tangentes se confondent, une seule branche est réelle; la direction asymp-

totique est l'axe des x. Un point d'inflexion à l'infini ayant pour tangente l'axe des y. Courbe de quatrième classe.

$$\text{(XVIII)} \qquad y^5 + 3y^4 - 2yx^2 - x^3 + 1 = 0.$$

Un point triple à l'infini dont deux tangentes coïncident avec la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des x; les tangentes au point triple ont avec la courbe un contact du second ordre. Courbe de treizième classe.

$$\text{(XIX)} \qquad x^7 y^4 - 2x^6 y^2 + x^5 - 1 = 0.$$

Un point septuple à l'infini dont les sept tangentes coïncident avec l'axe des y, le contact est du quatrième ordre; une seule branche est réelle. Un point quadruple à l'infini, dont les quatre tangentes coïncident avec l'axe des x; le contact est du deuxième ordre. La courbe est de la quarante-septième classe.

$$\text{(XX)} \qquad x^3 y^3 + xy^2 + 1 = 0.$$

Deux points triples dont les trois tangentes se confondent, les directions asymptotiques sont l'axe des y; suivant l'axe des y, le contact est du troisième ordre; suivant l'axe des x, le contact est aussi du troisième ordre; une seule branche est réelle. Courbe de quatorzième classe.

XV. — L'importance de la recherche des points multiples à l'infini est incontestable. Cette étude permet, en effet, de voir plus nettement la manière dont la courbe se dirige vers l'infini, et de construire avec plus de sûreté les branches paraboliques, pour lesquelles l'asymptote est transportée à l'infini, mais parallèlement à une direction déterminée; elle est surtout indispensable pour reconnaître la cause de la diminution de la classe pour la courbe, car cette diminution tient à la présence des points multiples, situés tant à l'infini qu'à distance finie.

On verra aussi, par les exemples que j'ai cités, la manière dont les branches de la courbe sont disposées par rapport à l'asymptote, suivant que le point à l'infini correspondant est ou un point simple ordinaire, ou un point simple d'inflexion, ou un point double, ou un point de rebroussement, etc.

Je donnerai bientôt l'étude des points à l'infini sur les surfaces; cette recherche présente un grand intérêt, et rattache à des idées générales les notions partielles qu'on donne, dans les cours, sur les cônes asymptotes des surfaces du second ordre.

NOTE SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. BRASSINNE.

Dans les ouvrages de Géométrie analytique les plus récents, il n'est pas fait mention du procédé de calcul que Lagrange emploie (*Mécanique analytique*, 1788, t. II, section 9) pour simplifier l'équation des surfaces du second ordre.

On n'a emprunté à cet important chapitre que la transformation des coordonnées rectangulaires dans l'espace, au moyen de trois déplacements successifs. Reproduisons, en l'abrégeant, une méthode élégante, qui doit prendre place dans les éléments :

1° L'équation de la surface du second ordre, ayant un centre et deux axes coordonnés x, y dans la direction d'un système conjugué rectangulaire, est

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'xz + 2B''yz = 1.$$

Cette forme, toujours possible avec des axes rectangulaires, étant admise, il est aisé de démontrer qu'il

existe un système conjugué et rectangulaire pour lequel l'équation de la surface est

$$(2) \qquad P x'^2 + P' y'^2 + P'' z'^2 = 1.$$

On regarde P, P′, P″ comme des inconnues, et après avoir transformé l'équation (2) au moyen des formules

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned}$$

on l'identifie avec l'équation (1) et on trouve facilement :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & P\alpha^2 + P'\alpha'^2 + P''\alpha''^2 = A, \\ & P\beta^2 + P'\beta'^2 + P''\beta''^2 = A', \\ & P\gamma^2 + P'\gamma'^2 + P''\gamma''^2 = A'', \\ & P\alpha\beta + P'\alpha'\beta' + P''\alpha''\beta'' = 0, \\ & P\alpha\gamma + P'\alpha'\gamma' + P''\alpha''\gamma'' = B', \\ & P\beta\gamma + P'\beta'\gamma' + P''\beta''\gamma'' = B''. \end{aligned} \right.$$

Or Lagrange prend d'abord pour inconnues $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, et il détermine $P\alpha$ en multipliant la première relation du groupe (3) par α, la quatrième par β, la cinquième par γ, et ajoutant les trois résultats; il obtient, en vertu des conditions connues et en opérant d'une manière analogue pour $P\beta$, $P\gamma$:

$$\begin{aligned} P\alpha &= A\ \alpha + B'\gamma, \\ P\beta &= A'\beta + B''\gamma, \\ P\gamma &= A''\gamma + B'\alpha + B''\beta. \end{aligned}$$

Éliminant de ces dernières relations $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, on arrive presque sans calcul à l'équation du troisième degré

$$(4) \quad (P - A)(P - A')(P - A'') - B'^2(P - A') - B''^2(P - A) = 0,$$

dont les racines ou valeurs de P sont les expressions de

$\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, en désignant des axes par a, b, c: or, si l'on a $A > A' > A''$, la substitution pour P de $+\infty$, A, A'', $-\infty$ démontre que les trois racines sont réelles.

2° Sans autre calcul que la résolution de l'équation de la surface du second ordre, on voit que, dans un nombre infini de cas, elle prend, avec des axes obliques, la forme

$$(5) \qquad Ax^2 + A'y^2 + Mz^2 = 1.$$

On peut même supposer que x, y sont rectangulaires et que z fait avec ces directions des angles θ, θ'. Si par l'origine O on mène au plan xy une perpendiculaire Oz', on passera du système oblique au rectangulaire x, y, z', en éliminant de l'équation (5), x, y, z au moyen des formules

$$x' = x + z\cos\theta, \quad y' = y + z\cos\theta', \quad z' = z\cos\theta''.$$

Le résultat sera

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & Ax'^2 + A'y'^2 + \left(\frac{M}{\cos^2\theta''} + \frac{A\cos^2\theta}{\cos^2\theta''} + \frac{A'\cos^2\theta'}{\cos^2\theta''}\right) z'^2 \\ & \qquad - 2.\frac{A\cos\theta}{\cos\theta''} x'z' - 2.\frac{A'\cos\theta'}{\cos\theta''} y'z' = 1. \end{aligned} \right.$$

Cette équation a la forme (1) que nous avons supposée d'abord. Remplaçant A'', B', B'' par leurs nouvelles valeurs et faisant $A = \frac{1}{a'^2}$, $A' = \frac{1}{b'^2}$, $M = \frac{1}{c'^2}$, l'équation du troisième degré devient

$$\begin{aligned} P^3 & - \frac{P^2}{\cos^2\theta''}\left(\frac{1}{c'^2} + \frac{1}{a'^2}\sin^2\theta + \frac{1}{b'^2}\sin^2\theta\right) \\ & + \frac{P}{\cos^2\theta''}\left(\frac{1}{a'^2 b'^2} + \frac{1}{a'^2 c'^2} + \frac{1}{b'^2 c'^2}\right) - \frac{1}{a'^2 b'^2 c'^2 \cos^2\theta''} = 0. \end{aligned}$$

Les relations des racines et des coefficients expriment les trois théorèmes fondamentaux sur les diamètres conjugués.

THÉORÈMES;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Un système de *six* plans quelconques donne lieu à *dix* diagonales, réunissant le point de concours de trois des six plans au point de concours des trois autres; et à *dix* sphères, décrites sur ces diagonales comme diamètres : ces dix sphères ont le même centre radical et la même *sphère orthogonale*. Nous nommerons celle-ci la *sphère radicale* des six plans du système.

2. La *sphère radicale* d'un système de six plans est le lieu des centres des hyperboloïdes *équilatères*

$$(a^2 \pm b^2 - c^2 = 0),$$

à une ou à deux nappes, tangents aux six plans du système. Et le lieu des centres d'une surface du second ordre, tangente aux mêmes plans, et dont la somme des carrés des axes demeure égale à une constante quelconque, est une sphère concentrique à la précédente.

3. Un système de *sept* plans donnant naissance à sept systèmes de six plans, les sept sphères radicales, relatives à chacun de ces systèmes, se coupent dans un même cercle : le *cercle radical* du système des sept plans, et le lieu géométrique des centres des hyperboloïdes équilatères tangents aux sept plans du système.

4. Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à un système de *sept* plans est le plan du cercle radical du système.

5. *Huit* plans donnant naissance à huit systèmes de sept

plans, et à huit cercles radicaux; ces huit cercles se coupent dans les deux mêmes points : ces points sont les centres des deux hyperboloïdes équilatères tangents aux huit plans; et la droite qui les réunit, ou l'*axe radical* du système des huit plans, est le lieu général des centres des surfaces du second ordre tangentes aux huit plans.

6. *Neuf* plans donnent naissance à neuf systèmes de huit plans dont les neuf axes radicaux concourent en un même point, *centre radical* des neuf plans et centre de la surface du second ordre tangente à ces neuf plans.

7. Les neuf plans étant $o = P_1 = P_2 = \ldots = P_9$, l'équation

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = o,$$

rendue linéaire en x, y, z, représente le système des plans diamétraux de la surface du second ordre tangente aux neuf plans.

8. Si quatre des dix diagonales d'un système de six plans ont leurs points milieux dans un même plan, les points milieux des dix diagonales seront dans un même plan.

18 avril 1864.

QUESTIONS.

706. On donne sur un plan deux circonférences (O), (O'). Par un point fixe A de la première, on trace une conique (C) tangente en ce point à cette circonférence et doublement tangente à la seconde (O'). Cette conique (C) rencontre (O) aux points D et E; la droite DE coupe la corde de contact de (C) et de (O') en un point M : lorsque l'on

considère toutes les coniques telles que (C), le lieu de ce point est une circonférence. (MANNHEIM.)

707. On donne sur un plan deux coniques homofocales (O), (O'). Par un point fixe A de la première, on trace une conique (C) tangente en ce point à (O) et doublement tangente à la seconde (O'). On mène les tangentes communes à (O) et à (C), ces droites se coupent en M : lorsque l'on considère toutes les coniques telles que (C), le lieu de ce point est une conique homofocale aux coniques données. (MANNHEIM.)

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 561

(voir tome XX, page 56);

PAR M. CHARLES BRISSE (*),
Élève de l'École Polytechnique.

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à seize fois le carré de la tangente menée de son centre au cercle des neuf points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle et divisé par le produit de ses distances aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle. (FAURE.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les trois côtés du triangle donné que je prends pour triangle de référence ; une conique circonscrite à ce triangle a pour équation

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Si l'on pose, conformément à la notation du Mémoire de

(*) Ci-devant *Abraham Schnée.*

la page 289 du tome II (2[e] série),

$$\nabla = \begin{vmatrix} a & o & n & m \\ b & n & o & l \\ c & m & l & o \\ o & a & b & c \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés du triangle de référence,

$$\Delta = \begin{vmatrix} o & n & m \\ n & o & l \\ m & l & o \end{vmatrix} = 2lmn,$$

les distances du centre de la conique aux côtés du triangle seront données par les formules (*voir* Mémoire cité)

$$\alpha' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{Sd\nabla}{\nabla db},$$

$$\gamma' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc},$$

où S est la surface du triangle de référence.

La somme des carrés des demi-axes principaux est donnée (*voir* même Mémoire) par la formule

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = -a^2b^2c^2\frac{2\Delta E}{\nabla^2},$$

où

$$E = -2(l\cos A + m\cos B + n\cos C),$$

A, B, C étant les angles du triangle. En substituant, cette expression devient

$$8lmna^2b^2c^2\frac{l\cos A + m\cos B + n\cos C}{\nabla^2}.$$

Les distances du centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle sont, changées de signe,

$$\frac{a\alpha' - b\beta' - c\gamma'}{a} = \frac{2S}{a\nabla}\left(a\frac{d\nabla}{da} - \nabla\right),$$

$$\frac{-a\alpha' + b\beta' - c\gamma'}{b} = \frac{2S}{b\nabla}\left(b\frac{d\nabla}{db} - \nabla\right),$$

$$\frac{-a\alpha' - b\beta' + c\gamma'}{c} = \frac{2S}{c\nabla}\left(c\frac{d\nabla}{dc} - \nabla\right).$$

Si l'on désigne par ϖ le carré de la tangente menée du centre au cercle des neuf points, on a (*voir* Mémoire cité)

$$\varpi = 2\frac{\varphi(\alpha', \beta', \gamma')}{E_1},$$

où $\varphi = 0$ est l'équation du cercle des neuf points que voici d'ailleurs :

$$\alpha(a\alpha - b\beta - c\gamma)\cos A + \beta(-a\alpha + b\beta - c\gamma)\cos B$$
$$+ \gamma(-a\alpha - b\beta + c\gamma)\cos C = \varphi = 0,$$

et où

$$E_1 = 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C).$$

On sait d'ailleurs que

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{8S^2}{abc};$$

donc

$$E_1 = \frac{16S^2}{abc},$$

et par suite

$$\varpi = \frac{abc}{8S^2}\frac{2S^2}{\nabla^2}\left[\frac{d\nabla}{da}\cos A\left(a\frac{d\nabla}{da} - \nabla\right) + \frac{d\nabla}{db}\cos B\left(b\frac{d\nabla}{db} - \nabla\right)\right.$$
$$\left. + \frac{d\nabla}{dc}\cos C\left(c\frac{d\nabla}{dc} - \nabla\right)\right].$$

Or, on a

$$\nabla = -a^2 l^2 - b^2 m^2 - c^2 n^2 + 2\,bcmn + 2\,canl + 2\,ablm,$$

$$\frac{d\nabla}{da} = 2\,l(-la + mb + nc),$$

$$\frac{d\nabla}{db} = 2\,m(la - mb + nc),$$

$$\frac{d\nabla}{dc} = 2\,n(la + mb - nc),$$

$$\nabla - a\frac{d\nabla}{da} = (la - mb + nc)(la + mb - nc),$$

$$\nabla - b\frac{d\nabla}{db} = (la + mb - nc)(-la + mb + nc),$$

$$\nabla - c\frac{d\nabla}{dc} = (-la + mb + nc)(la - mb + nc),$$

ce qui réduit la valeur de ϖ à

$$\varpi = -\frac{abc}{4\nabla^2}2(l\cos A + m\cos B + n\cos C)$$
$$\times(-la + mb + nc)(la - mb + nc)(la + mb - nc),$$

et donne

$$16\varpi = -\frac{8abc}{\nabla^2}(l\cos A + m\cos B + n\cos C)$$
$$\times(-la + mb + nc)(la - mb + nc)(la + mb - nc).$$

Il s'agit de démontrer que l'on a

$$8\,lmna^2b^2c^2\frac{l\cos A + m\cos B + n\cos C}{\nabla^2}$$
$$= \frac{8\,abc}{\nabla^2}(l\cos A + m\cos B + n\cos C)\frac{S^3}{\nabla^2}8\,lmn\frac{abc\Delta^3}{8S^3},$$

ce qui est une identité.

Question 562
(voir tome XX, page 86);

PAR M. CHARLES BRISSE.

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au double du carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle donné pour points conjugués. (FAURE.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les trois côtés du triangle donné que je prends pour triangle de référence; une conique inscrite à ce triangle a pour équation (*voir* Salmon, *Conic Sections*, 3e édit., p. 101)

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\,\beta\gamma - 2nl\gamma\alpha - 2lm\,\alpha\beta = 0.$$

Si l'on pose, conformément à la notation du Mémoire de la page 289 du tome II (2e série),

$$\nabla = l^2m^2n^2 \begin{vmatrix} \frac{a}{l} & 1 & -1 & -1 \\ \frac{b}{m} & -1 & 1 & -1 \\ \frac{c}{n} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{a}{l} & \frac{b}{m} & \frac{c}{n} \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés du triangle de référence,

$$\Delta = l^2m^2n^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4l^2m^2n^2,$$

les distances du centre de la conique aux côtés du triangle seront données par les formules (*voir* Mémoire cité)

$$\alpha' = \frac{S}{\Delta}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{S}{\Delta}\frac{d\nabla}{db},$$

$$\gamma' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc},$$

où S est la surface du triangle de référence.

La somme des carrés des demi-axes principaux est donnée (*voir* même Mémoire) par la formule

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = -a^2b^2c^2\frac{2\Delta E}{\nabla^2},$$

où

$$E = l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos A + 2nl\cos B + 2lm\cos C,$$

A, B, C étant les angles du triangle de référence. En substituant, cette expression devient

$$8l^2m^2n^2a^2b^2c^2\frac{l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos A + 2nl\cos B + 2lm\cos C}{\nabla^2}.$$

Si l'on désigne par ϖ le carré de la tangente menée du centre au cercle conjugué au triangle de référence, on a (*voir* Mémoire cité)

$$\varpi = 2\frac{\varphi(\alpha', \beta', \gamma')}{E_1},$$

où $\varphi = 0$ est l'équation du cercle conjugué que voici d'ailleurs :

$$\alpha^2\sin 2A + \beta^2\sin 2B + \gamma^2\sin 2C = 0 = \varphi,$$

et où

$$E_1 = \frac{32S^3}{a^2b^2c^2}.$$

Donc

$$\varpi = \frac{a^2b^2c^2}{16S^2}\frac{S^2}{\nabla^2}\left[\left(\frac{d\nabla}{da}\right)^2\sin 2A + \left(\frac{d\nabla}{db}\right)^2\sin 2B + \left(\frac{d\nabla}{dc}\right)^2\sin 2C\right].$$

Or, on a

$$\nabla = 4lmn(amc + lbc + abn),$$

$$\frac{d\nabla}{da} = 4lmn(mc + bn),$$

$$\frac{d\nabla}{db} = 4lmn(lc + an),$$

$$\frac{d\nabla}{dc} = 4lmn(am + lb),$$

ce qui réduit la valeur de ϖ à

$$\varpi = \frac{a^2b^2c^2l^2m^2n^2}{S\nabla^2}[(mc + nb)^2\sin 2A + (lc + na)^2\sin 2B + (ma + lb)^2\sin 2C].$$

Si l'on développe la parenthèse, on obtient

$$l^2(c^2\sin 2B + b^2\sin 2C) + m^2(c^2\sin 2A + a^2\sin 2C) + n^2(b^2\sin 2A + a^2\sin 2B) + 8S(mn\cos A + nl\cos B + lm\cos C),$$

on sait d'ailleurs que

$$c^2\sin 2B + b^2\sin 2C = c^2\sin 2A + a^2\sin 2C = b^2\sin 2A + a^2\sin 2B = 4S,$$

ce qui donne définitivement

$$2\varpi = 8l^2m^2n^2a^2b^2c^2 \times \frac{l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos A + 2nl\cos B + 2lm\cos C}{\nabla^2},$$

et prouve le théorème.

Question 692

(voir p. 139);

PAR M. CH. DE SAINT-PRIX.

Soit une série de paires de quantités a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; ..., les a étant plus grandes que les b, dont la loi de la formation est la suivante :

$$a_x = a_{x-1} + b_{x-1}, \quad b_x = a_{x-1};$$

trouver la limite du rapport $\frac{a_x}{b_x}$ lorsque x devient infini.

(STREBOR.)

On a, par la loi de formation,

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_{x-1} + b_{x-1}}{a_{x-1}} = 1 + \frac{b_{x-1}}{a_{x-1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$$

La limite de cette fraction continue est la racine positive de l'équation

$$y = 1 + \frac{1}{y} \quad \text{ou} \quad y^2 - y - 1 = 0.$$

On aura donc

$$\lim \frac{a_x}{b_x} = y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Louis Chancel, élève de Sainte-Barbe (Lyon); de Marsilly; Ch. Pierre, élève du lycée de Caen; de Virieu; prince Georges Gagarinn, élève de l'École Polytechnique de Zurich.

Question 667

(voir 2e série, t. II, p. 372);

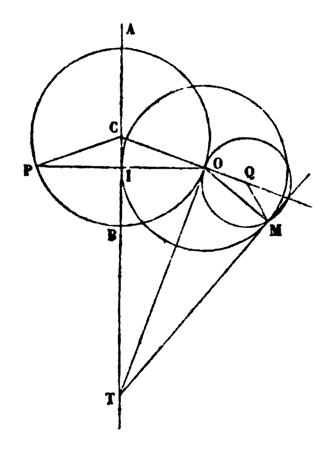
PAR M. DE MARSILLY.

THÉORÈME A DÉMONTRER. — *L'enveloppe des circonférences ayant leurs centres sur une circonférence* C *et tangentes à un diamètre* AB *de* C *est l'épicycloïde en-*

gendrée par une circonférence de rayon moitié moindre que C, *roulant sur* C.

QUESTION. — *Si l'on remplace le diamètre* AB *par une droite quelconque, l'enveloppe est-elle encore une épicycloïde?* (CATALAN.)

Soient C le centre du cercle fixe, O le centre du cercle mobile dans une position quelconque, OI = OM son rayon, M le point de l'enveloppe. MO est normale à la courbe et moitié de PO; le premier fait est une propriété des enveloppes, le second une propriété



du cercle. Je mène au point M une perpendiculaire MT à MO, c'est-à-dire une tangente à l'enveloppe et au cercle mobile O; elle rencontrera en T le diamètre AB; je joins OT, et à cause de IO = MO, j'ai deux triangles égaux IOT, MOT comme rectangles et ayant deux côtés égaux chacun à chacun. Donc les angles IOT, MOT sont égaux, et, par suite, leurs compléments COP, MOQ le sont. Achevons les triangles isocèles COP, MOQ; ils seront semblables comme ayant leurs angles égaux; et

puisque $MO = OI = \frac{1}{2} OP$, on aura $OQ = \frac{1}{2} OC$. Donc si du point Q comme centre, avec un rayon OQ, on décrit un cercle qui passera par le point M et sera tangent en O au cercle C, ce cercle Q aura constamment son rayon égal à la moitié de celui de la circonférence C; partant, puisque les angles MQO, OCP sont égaux, l'arc MO intercepté entre les côtés de l'angle MQO sur la petite circonférence sera égal à la moitié de l'arc OP intercepté entre les côtés de l'angle OCP sur la grande circonférence; en un mot, l'arc $MO = OB = \frac{1}{2} OBP$. Donc un point quelconque de l'enveloppe appartiendra à l'épicycloïde engendrée par un point de la circonférence de rayon moitié moindre roulant sur C, et se trouvant en contact avec la circonférence C aux points A et B. C. Q. F. D.

Lorsqu'on examine la formation d'une épicycloïde, il est évident que tous les points de rebroussement, lorsqu'il y en a, et il doit toujours y en avoir, sont sur le cercle fixe; que les distances de ces points de rebroussement, mesurées sur ce cercle fixe, soit par les arcs interceptés, soit par leurs cordes, sont les mêmes pour toutes; et que leurs distances maxima entre les cordes dont il s'agit et le point le plus éloigné de l'arc d'épicycloïde correspondant est constant. Il est également évident que si AB cesse d'être un diamètre, mais coupe le cercle C, et que du centre C on abaisse une perpendiculaire KL sur AB, l'enveloppe sera symétrique par rapport à KL; qu'elle aura des points de rebroussement en A et B; mais que ses écarts maxima de AB, situés sur la perpendiculaire KL, et égaux au double de la perpendiculaire abaissée des points K et L de la circonférence C sur AB, seront inégaux; elle ne peut donc pas être une épicycloïde. Et cela est plus vrai encore quand AB cesse de couper la

circonférence C, puisqu'il n'y a plus de rebroussement.

Donc l'enveloppe ne peut plus être une épicycloïde quand AB cesse d'être un diamètre. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Mirza-Nizam, Moulins, Contet, Laquière, Courtin et Godart, Léon Dyrion.

Même question;

PAR M. PAUL MANSION (DE MARCHIN).

Je tirerai la démonstration du théorème, d'un théorème plus général que je vais énoncer : j'y emploie le terme *hypocycloïde*, pour désigner la courbe engendrée par un point d'un cercle roulant dans un cercle, en ayant sa concavité tournée du même côté; épicycloïde, quand les concavités sont tournées en sens contraire. Cela posé :

Si deux cercles égaux, l'un intérieur, l'autre extérieur, roulent sur un troisième cercle fixe, les courbes décrites par les points des deux cercles mobiles primitivement en contact peuvent être considérées comme les enveloppes d'un même cercle dont le centre serait sur la circonférence fixe et dont le rayon variable serait constamment égal à la droite qui joint le point décrivant de l'hypocycloïde au point de contact correspondant.

Soit A le point de départ commun de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde; M le point de contact commun des deux cercles dans une de leurs positions quand les points décrivants de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde sont m et m'. Le cercle dont le rayon est Mm' et qui a son centre au point M passera par m. En effet, $Mm' = Mm$, comme cordes d'arcs égaux dans des cercles égaux, car arc Mm = arc MA = arc Mm'. D'ailleurs, ce cercle est constamment tangent à l'épicycloïde et à l'hypocycloïde, car, d'après la propriété fondamentale de ces courbes,

Mm, Mm' leur sont respectivement normales. Le théorème général est donc démontré.

Pour en tirer le théorème particulier énoncé par M. Catalan, il suffit de remarquer que l'*hypocycloïde*, engendrée par un cercle roulant dans un cercle de rayon double, est un diamètre du grand cercle. Mais cette propriété est trop connue pour la démontrer ici.

Question 670;

PAR M. CONTET,
Élève du lycée de Besançon.

Dans l'hyperbole équilatère, le produit de la distance d'un point de la directrice au centre, par la tangente de l'angle sous lequel on voit de ce point l'hyberbole, égale l'axe transverse. (FAURE.)

Soit l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

La distance d'un point quelconque $P\left(\frac{a^2}{c}, \beta\right)$ de la directrice $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ au centre de l'hyperbole est

$$l = \sqrt{\beta^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

Les tangentes à l'hyperbole devant passer par le point P, on aura l'équation de condition

$$\beta = m\frac{a}{\sqrt{2}} \pm a\sqrt{m^2 - 1},$$

dans laquelle le coefficient angulaire m est l'inconnue. Cette équation, mise sous forme entière,

$$\frac{a^2}{2}m^2 + \frac{2a\beta}{\sqrt{2}}m - (a^2 + \beta^2) = 0,$$

est du second degré; ses deux racines donnent les directions des tangentes menées du point P à l'hyperbole.

L'angle ν, sous lequel on voit du point P l'hyperbole, est donné par le calcul suivant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{m'' - m'}{1 + mm'} = \frac{-4\sqrt{\left(\beta^2 + \frac{a^2}{2}\right)}}{a\left[1 - \frac{2(a^2+\beta^2)}{a^2}\right]} = \frac{2a}{\sqrt{\beta^2 + \frac{a^2}{2}}};$$

on a donc

$$l \operatorname{tang}\varphi = 2a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

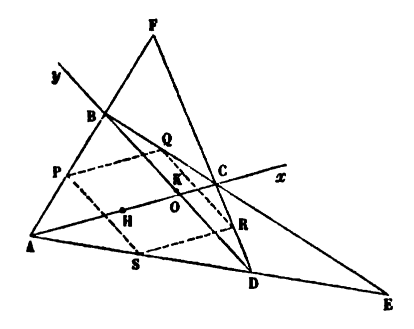
Question 625

(voir 1re série, t. Ier, p. 382);

PAR M. JACQUIN.

Les six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère, les deux points où se coupent les côtés opposés, le point d'intersection des deux diagonales, sont sur une même ligne du second degré.

Lorsque les quatre sommets du quadrilatère appartiennent à une circonférence, la ligne du second degré



sur laquelle se trouvent les neufs points désignés est une

hyperbole équilatère qui passe par le centre de la circonférence et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles que forment les deux diagonales du quadrilatère.

Soient ABCD le quadrilatère ; P, Q, R, S les milieux des côtés AB, BC, CD, DA ; O le point d'intersection des diagonales AC, BD, que je prendrai pour axes des coordonnées.

Soient de plus $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$; les équations des côtés PS, PQ, QR, RS du parallélogramme PQRS seront respectivement

$$2x = a, \quad 2y = b, \quad 2x = c, \quad 2y = d;$$

et par suite celle d'une conique passant par les quatre points P, Q, R, S,

$$(2x - a)(2x - c) + \lambda(2y - b)(2y - d) = 0.$$

Cette courbe passera au point O si l'on a

$$ac + \lambda bd = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = -\frac{ac}{bd}.$$

Remplaçant λ par cette valeur, l'équation de la conique qui passe par les cinq points O, P, Q, R, S sera

$$(1) \qquad bdx\left(x - \frac{a+c}{2}\right) - acy\left(y - \frac{b+d}{2}\right) = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît qu'elle passe aussi par les deux points H, K, milieux des diagonales AC, BD du quadrilatère.

On vérifie facilement que l'équation (1) de la conique est satisfaite par les coordonnées

$$x = \frac{ac(b-d)}{ab-cd}, \quad y = \frac{bd(a-c)}{ab-cd}$$

du point d'intersection E des côtés opposés BC, AD du quadrilatère.

On vérifierait aussi de la même manière que les coordonnées du point d'intersection F des deux autres côtés satisfont à cette équation. Ainsi les neuf points en question sont situés sur une même conique.

Si le quadrilatère ABCD est inscriptible, $ac = bd$ et l'équation (1) se réduit à

$$(2) \qquad x^2 - y^2 - \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}y = 0.$$

Dans ce cas, elle représente une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les axes.

Le cercle circonscrit au quadrilatère a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - (a+c)x - (b+d)y + ac = 0,$$

θ désignant l'angle des axes. Les coordonnées du centre de ce cercle seront données par les équations

$$x + y\cos\theta = \frac{a+c}{2},$$

$$y + x\cos\theta = \frac{b+d}{2}.$$

Multipliant la première par x et la deuxième par y et retranchant membre à membre, on obtient l'équation (2). Donc l'hyperbole passe par le centre du cercle.

Note. — La question 670 (p. 202) a encore été résolue par MM. Selleron, de Trenquelléon, Grouard, Josselin, Muzeau, Dupain, Mirza-Nizam, Picquet, de Saint-Prix et Tivollier, Léon Dyrion, du Mesnil, Courtin et Godart, de Vigneral.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1863;

SOLUTION PAR M. ALFRED-ISIDORE-FRANÇOIS SALLES (*),
Élève du lycée de Montpellier (classe de M. Berger).

On donne sur un plan deux circonférences C *et* C'; *d'un point* A *de* C, *on mène des tangentes à* C', *on joint les points de contact de ces tangentes; cette droite coupe la tangente menée en* A *à la circonférence* C *en un point* M : *on demande l'équation du lieu décrit par* M, *lorsque* A *parcourt la circonférence* C.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relative des circonférences C *et* C'.

Indiquer les cas où il se décompose : faire voir que le lieu des points M *est tangent à la circonférence* C *en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence* C'.

Je prends pour axe des y l'axe radical des deux circonférences données; pour axe des x la ligne des centres; les équations des deux circonférences seront alors

(1) $$x^2+y^2-2ax-k^2=0,$$

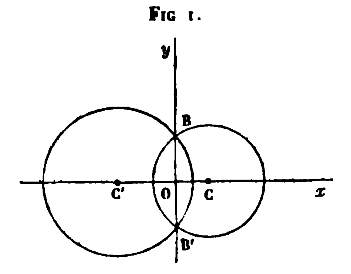
(2) $$x^2+y^2-2a'x-k^2=0.$$

a désigne la distance CO du centre de la première circonférence à l'origine, distance que nous pouvons toujours regarder comme positive; a' désigne la distance C'O

(*) Reçu le 35e, aujourd'hui le 9e. Cette composition a eu la note 18. Nous la reproduisons textuellement sans même corriger quelques légères incorrections ou inadvertances.

qui peut prendre toutes les valeurs positives ou négatives,

FIG 1.



excepté cependant la valeur a. Les polaires du point (α, β) par rapport aux courbes (1) et (2) *sont*

$$\begin{cases} \alpha(x - a) + \beta y - a x - k^2 = 0, \\ \alpha(x - a') + \beta y - a' x - k^2 = 0; \end{cases}$$

les abscisses d'intersection de ces deux droites s'obtiennent facilement en retranchant leurs équations. On trouve ainsi

$$\begin{cases} x = -\alpha, \\ y = \dfrac{k^2 + \alpha^2}{\beta}, \end{cases}$$

la valeur $x = -\alpha$ (*) donne un théorème de Géométrie inutile à énoncer. Si maintenant le point (α, β) décrit une courbe quelconque $f(\alpha, \beta) = 0$, le lieu du point de rencontre des deux polaires d'un point (α, β) de cette courbe aura pour équation

$$f\left(-x, \frac{k^2 + x^2}{y}\right) = 0.$$

(*) Il valait mieux déduire de là, comme l'ont fait quelques candidats, une construction du lieu plus simple que celle de l'énoncé. *On mène à la circonférence* C *une tangente* AB *au point* A *de cette courbe : cette droite coupe l'axe radical* Oy *en un point* B; *on prolonge* AB, *et sur ce prolongement on prend* BN = AB. *Le point* N *décrit le lieu.*

Si le point (α, β) décrit une droite, le point (x, y) décrit une conique. En effet, si on a

$$A\alpha + B\beta + C = 0,$$

on aura

$$-Axy + Bx^2 + Cy - Bk^2 = 0,$$

hyperbole passant aux points B, B' et dont l'équation ne dépend que de k^2 ; ainsi ce lieu est le même pour tous les cercles qui ont même axe radical, c'est-à-dire pour tous les cercles qui ont quatre points communs (*). Cette remarque est susceptible de généralisation ; quelle que soit la fonction $f(\alpha, \beta) = 0$, le lieu du point (x, y) restera le même pour toutes les coniques qui ont quatre points communs. Cela résulte de l'équation

$$f\left(-x, \frac{k^2 + x^2}{y}\right) = 0,$$

mais c'est aussi une conséquence de ce théorème connu : les polaires d'un point fixe par rapport à toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère se coupent en un même point. Appliquons ce qui précède au cas particulier où le point (α, β) décrit le cercle (1) : on a

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - k^2 = 0;$$

donc le lieu du point M demandé a pour équation

$$(3) \qquad x^2 + \frac{(k^2 + x^2)^2}{y^2} + 2ax - k^2 = 0.$$

Multiplions par y^2 après nous être assuré que l'axe des x ne fait point partie du lieu : l'équation du lieu du point M s'écrit

$$(4) \qquad y^2 = \frac{(k^2 + x^2)^2}{k^2 - 2ax - x^2}.$$

Avant de discuter cette équation, qui ne dépend nulle-

(*) Dont deux à l'infini. P.

ment du cercle (2) (*), je vais montrer que cette courbe (4) est tangente au cercle (1) aux points B et B'. Cherchons l'*intersection de* (1) *et de* (4) (**) : on a pour déterminer les abscisses d'intersection l'équation

$$(2ax + k^2 - x^2)(2ax + x^2 - k^2) + (k^2 + x^2)^2 = 0,$$

équation qui se réduit à

$$4(a^2 + k^2)x^2 = 0;$$

mais on a, en désignant par R le rayon du cercle (1),

$$k^2 = R^2 - a^2.$$

Donc, comme R n'est pas nul, l'intersection de (1) et de (4) est fournie par l'intersection de (1) avec les droites $x = 0$ et $x = 0$. Donc (1) et (4) *sont tangentes en* B et B', et cela quel que soit R^2, positif, nul ou négatif. On a toujours encore

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2(k^2 + x^2)}{(k^2 - 2ax + x^2)^2}(ak^2 + 3k^2x - 3ax^2 - x^3),$$

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ak^2 + 3k^2x - 3ax^2 - x^3}{(k^2 - 2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(*) Le rayon de ce cercle n'ayant aucune influence sur le lieu cherché, en le supposant infini on parvient à la construction indiquée dans la note précédente (p. 269). En supposant ce rayon nul, on ramène le problème au suivant : *Une circonférence* (C) *et un point fixe* F *sont donnés ; on mène une tangente à* (C) *au point* A *de cette courbe, on prend sur cette tangente une longueur* AM *vue du point* F *sous un angle droit : lorsque* A *parcourt la circonférence* (C), *quel est le lieu décrit par le point* M ? Le lieu de la composition est encore identique : 1° au lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique et à une certaine parabole ayant le même axe focal et un foyer commun ; 2° au lieu des points de contact sur une circonférence mobile ayant même axe radical qu'une circonférence fixe, des tangentes communes à ces deux circonférences ; 3° au lieu de la seconde composition, rapportée dans le numéro de décembre 1863, p. 551.

(*Communiqué.*)

(**) Le numéro qui rappelle une équation peut aussi désigner la courbe que cette équation représente ; mais dans ce cas il faudrait dire l'intersection des courbes (1) et (4). En répétant le mot *courbe* devant le nu-

Discussion de la courbe (4).

Je distinguerai trois cas :

Premier cas : $k^2 > 0$. — Comme on a $k^2 = R^2 - a^2$, R sera plus grand que a ; d'ailleurs

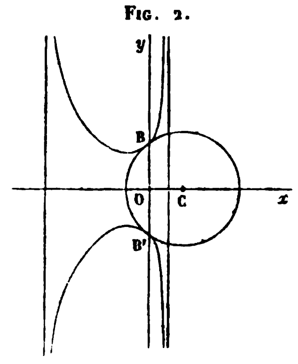
$$x^2 + 2ax - k^2 = (x + a + R)(x + a - R);$$

la courbe (4) *devient* donc

$$y^2 = \frac{(x^2 + k^2)^2}{(R - x - a)(R + x + a)},$$

courbe qui ne coupe pas l'axe Ox, qui rencontre l'axe Oy

Fig. 2.



aux deux points B, B', et comprise entre les deux droites asymptotes

$$x = R - a,$$
$$x = -(R + a).$$

Cela donne déjà une idée de la forme de la courbe. Pour achever de le déterminer, je vais étudier la dérivée (5). Pour tout point de la courbe, $k^2 - 2ax - x^2 > 0$, et comme nous pouvons nous borner à considérer les points

---

méro, on éviterait des incorrections choquantes comme celle-ci : *un et quatre sont tangentes*. P.

situés au-dessus de Ox, il s'ensuit que

$$(k^2 - 2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} > 0.$$

L'étude de la dérivée revient donc à l'étude de la fonction $ak^2 + 3k^2x - 3ax^2 - x^3$. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3ax^2 - 3k^2x - ak^2 = 0;$$

remplaçons k^2 par $R^2 - a^2$, elle devient

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 3(R^2 - a^2)x - a(R^2 - a^2) = 0.$$

Cette équation a trois racines réelles, ce que montre le tableau suivant :

(6)

x	$f(x)$
$+\infty$	$+\infty$
$R - a$	$-2R^3$
0	$-a(R^2 - a^2)$
$-\frac{a}{3}$	$\frac{8a^3}{27}$
$-(R + a)$	$+2R^3$
$-\infty$	$-\infty$

L'on voit par là que la tangente de la courbe (4) est horizontale seulement en un point dont l'abscisse est comprise entre 0 et $-\frac{a}{3}$; les deux autres racines ne conviennent pas évidemment à la courbe. On conclut de là que la courbe (4) a *rigoureusement* (*) la forme indiquée. L'équation (5) peut montrer ce que nous avons déjà

(*) Ce mot était bien inutile ici. P.

vu : *que* (4) *est tangente à* (1) aux points B et B'. En effet, faisons dans (5) $x=0$, il vient $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{k}$; c'est précisément le coefficient angulaire de la tangente en B au cercle (1).

Dans ce cas, l'équation (4) ne peut jamais s'abaisser. En effet, pour que cela eût lieu, il faudrait que le numérateur et le dénominateur de y^2 aient des racines communes, ce qui est impossible, le numérateur n'ayant que des racines imaginaires, le dénominateur que des racines réelles. Lorsque $a=0$, le cercle (1) est décrit sur BB' comme diamètre; la courbe admet alors le point O pour centre, la dérivée s'annule par $x=0$, l'équation (4) devient

$$y^2=\frac{(x^2+k^2)^2}{k^2-x^2}=\frac{(x^2+R^2)^2}{R^2-x^2},$$

courbe que l'on rencontre dans divers problèmes sur le cercle.

Deuxième cas : $k^2=0$. — Dans le cas précédent, les cercles (1) et (2) se coupaient en deux points réels : ici, ils sont tangents. L'équation (4) devient

$$y^2=-\frac{x^3.x}{(x+2a).x},$$

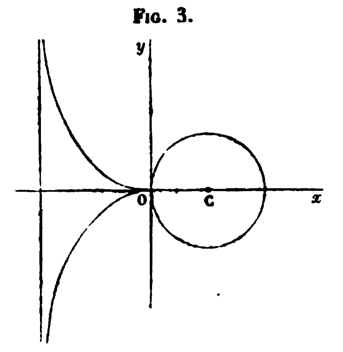
et se décompose en deux $x=0$: c'est l'axe des y, qui appartient au lieu (car les polaires du point O relatives à tous les cercles tangents à Oy en O coïncident), et

$$y^2=\frac{-x^3}{x+2a},$$

cissoïde, courbe connue qu'il me semble inutile de discuter ici, et dont il n'y a pas lieu de rappeler les propriétés : la construction de la courbe donnée par Newton, la construction de la tangente en un point fondée sur le centre

instantané de rotation, ou bien sur la propriété dont

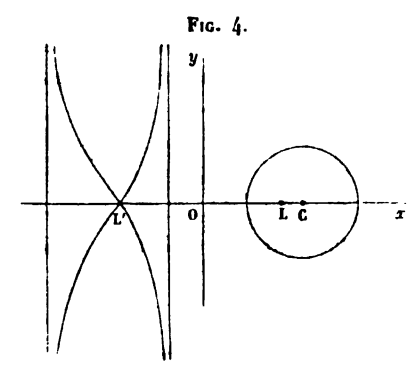
Fig. 3.



jouit la cissoïde d'être la podaire d'une parabole, etc., etc. On peut remarquer encore que dans ce cas la courbe (4) est tangente aux points B, B′ confondus en O : en effet, Oy fait parti du lieu.

Troisième cas : $k^2 < 0$. — Les deux cercles se coupent

Fig. 4.



en deux points imaginaires. Comme on a toujours $k^2 = R^2 - a^2$, il suit que $R < a$, l'équation (4) s'écrit toujours

$$y^2 = \frac{(x^2 + k^2)^2}{(R + x + a)(R - x - a)} = \frac{(x^2 + R^2 - a^2)^2}{(R + x + a)(R - x - a)}.$$

Les deux asymptotes qui limitent la courbe sont

$$x = -(a + R),$$
$$x = -(a - R);$$

elles sont toutes deux à gauche de Oy. La courbe coupe l'axe des x en deux points

$$x = \pm \sqrt{a^2 - R^2}.$$

On reconnaît facilement que

$$a - R < + \sqrt{a^2 - R^2}, \quad a + R > \sqrt{a^2 + R^2}.$$

Le point L est donc un point isolé; le point L′ est un point de la courbe. Il me semble que ces *deux points* L et L′ *sont les points limites* de M. Poncelet. D'ailleurs, comme la dérivée (5) ne s'annule pas pour

$$x = - \sqrt{a^2 - R^2},$$

il s'ensuit que la courbe a la forme indiquée. Le point L′ est un point double; en effet, dans l'équation qui précède (5), on voit que lorsque $x^2 + k^2 = 0$, auquel cas $y = 0$, cette équation devient

$$0 . \frac{dy}{dx} = 0.$$

Pour trouver les tangentes au point L′, il faudrait recourir à $\frac{d^2y}{dx^2}$ (*).

(*) Inachevé. Plusieurs candidats ont pensé que la courbe touchait l'axe des x au point L′, parce qu'ils obtenaient un carré parfait en faisant $y = 0$. Mais le point en question étant multiple, cette circonstance ne pouvait rien apprendre sur la direction de la tangente.

REMARQUES
Sur les compositions de Trigonométrie et de Mathématiques faites en 1863 pour l'admission à l'École Polytechnique.

Composition de Trigonométrie.

On a indiqué, l'année dernière (*voir* le numéro de juin 1863, p. 281), les fautes qui se rencontrent le plus fréquemment dans la composition de Trigonométrie. Il serait inutile d'en reproduire le tableau, qui est à peu près le même tous les ans. La plupart sont des fautes d'inattention et tiennent au manque d'habitude. Un élève qui a résolu une dizaine de triangles n'est pas exposé à prendre un sinus dans la colonne des tangentes, ou à commettre d'autres bévues de ce genre. Quant aux formules fausses, outre qu'il est bien facile de les éviter en consultant l'instruction qui accompagne les tables, un peu d'attention suffit souvent pour s'apercevoir de leur inexactitude. Par exemple, il est visible que la formule

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

est fausse, puisqu'elle donnerait $c = 0$, pour $a = b$, quel que soit C. On est également inexcusable lorsqu'on écrit des résultats dont l'absurdité est évidente. Le meilleur calculateur peut se tromper, mais il n'inscrira jamais des valeurs comme les suivantes :

$$A = 35^\circ, \quad B = 48^\circ, \quad C = 34^\circ,$$

ou

$$a = 2245, \quad b = 528, \quad c = 46.$$

Il verrait bien, dans le premier cas, que la somme des

angles est moindre que 180 degrés, et dans le second, que le côté *a* est supérieur à la somme des deux autres; mais certains candidats calculent pour ainsi dire les yeux fermés, et on en a vu trouver pour les angles des valeurs négatives, sans manifester le moindre doute au sujet d'un si étrange résultat.

M. Hoüel nous a communiqué, à l'occasion des remarques de 1863, plusieurs observations, que nos lecteurs seront bien aises de trouver ici. On avait dit que les erreurs de transcription provenaient sans doute de l'habitude d'épeler le logarithme trouvé dans la table, au lieu de l'énoncer. Tel n'est pas l'avis de M. Hoüel.

» Vous dites que pour éviter les erreurs de transcription des logarithmes, il vaut mieux les énoncer que les épeler. Je suis arrivé à une conclusion toute contraire, et pour diminuer le nombre des erreurs je ne trouve pas de meilleur remède que d'*épeler* le nombre *tout entier*, en énonçant chaque chiffre mentalement, à intervalles égaux, *en mesure*. Pour cela, au lieu de zéro, qui est de deux syllabes, je dis simplement O. Cela fait, le nombre reste parfaitement gravé dans l'oreille pendant le temps nécessaire pour sa transcription. Cette transcription faite, on recommence de nouveau, et avec beaucoup d'attention, la lecture du nombre, et il est très-aisé de voir si cette seconde lecture s'accorde avec la première. »

Le moyen semble fort bon, puisqu'il est entendu que ce n'est pas d'une simple épellation qu'il s'agit, mais d'une épellation *en mesure*. Mais ce n'est pas ainsi que les élèves la pratiquent. Ils écrivent chiffre par chiffre, en faisant autant de voyages, de leur copie à la table, qu'il y a de chiffres à écrire. C'est évidemment une mauvaise méthode.

Au reste, en conseillant d'énoncer le logarithme à transcrire, nous ne prétendons pas qu'on doive l'énoncer

en entier, mais seulement par tranches, Ainsi, 3243227 se prononcerait : trois cent vingt-quatre; trente-deux; vingt-sept.

« Je vous signalerai en outre, continue M. Hoüel, une autre recommandation qu'il serait bon de faire aux candidats et que je fais constamment à tous ceux que je vois. Malheureusement, étant seul à parler, je parle dans le désert : c'est de se servir, pour les interpolations, de la règle à calcul, cet admirable petit instrument que l'on a discrédité en voulant le faire servir à trop d'usages, mais qui n'en est pas moins précieux quand il s'agit de multiplications ou de divisions qui ne dépassent pas deux ou trois chiffres. Il existe contre cet instrument, dans le corps enseignant, un préjugé regrettable.

» Il y a bien encore une critique que j'aurais à faire sur l'usage du nombre cabalistique de 7 décimales. Un savant distingué m'écrivait dernièrement que l'inutile emploi d'un si grand nombre de décimales était ce qui avait le plus nui à la propagation des logarithmes. Mais ceci ne dépend pas des professeurs ni des élèves (*).

» En pratique, il est beaucoup plus commode de s'accoutumer à considérer les différences tabulaires, tantôt comme additives, tantôt comme soustractives. Pour éviter les erreurs qui peuvent naître de cette cause, il faut toujours, après l'interpolation, s'assurer que le logarithme est compris entre les deux qui correspondent aux arguments entre lesquels se trouve l'argument donné. C'est une précaution indispensable, surtout pour les commençants. »

(*) M. Hoüel a raison : quatre ou cinq décimales suffisent ordinairement. Mais les programmes ayant prescrit l'usage des tables à sept décimales, il faut bien que les élèves se servent de ces tables. S'il y a temps perdu, cela regarde les *savants pratiques* auxquels nous devons les programmes.

Nous n'ajouterons rien à ces sages recommandations, mais nous rappellerons aux candidats qu'ils doivent mettre sur leur copie tous les calculs accessoires, dont la connaissance est indispensable au correcteur pour reconnaître l'origine et l'importance des fautes commises. Il convient, à cet effet, de diviser la page en deux colonnes (non compris la marge, qui doit être laissée vide pour les corrections). Dans l'une se trouveront les calculs accessoires, dans l'autre les valeurs définitives des logarithmes et les calculs effectués sur eux pour arriver aux résultats.

Composition de Mathématiques.

La composition de Mathématiques a donné au correcteur l'occasion d'observer que la plupart des élèves ne se font pas une idée bien nette de ce qu'on doit entendre par la discussion d'un problème. Presque tous s'imaginent qu'il n'y a qu'à examiner isolément les cas singuliers et pour ainsi dire exceptionnels qui se présentent. Un cas particulier très-simple, dont la solution est évidente, peut servir à vérifier une formule, mais il n'entre en général dans la discussion d'un problème que d'une manière incidente et comme marquant une limite à certaines modifications que la solution éprouve quand on fait varier les données d'une manière continue.

Voici la marche qu'il convenait de suivre. La définition du lieu étant géométrique, son aspect général devait se déduire de la construction même indiquée par l'énoncé. La symétrie de la courbe, par rapport à la ligne des centres, l'existence de branches infinies, les directions asymptotiques, tout cela résultait sans effort d'un premier coup d'œil jeté sur la question.

Les autres propriétés de la courbe étant plus cachées, on aurait risqué de perdre son temps à les chercher par

une voie purement géométrique. Il fallait donc recourir au calcul et tout d'abord choisir des axes convenables. La ligne des centres se présentait naturellement comme axe des x. Quant à l'axe des y, on pouvait prendre la sécante commune, les points d'intersection des deux circonférences devant nécessairement appartenir au lieu; mais cela n'était pas indispensable. En prenant pour origine le centre de la première circonférence, ce qui simplifiait l'équation de la tangente à cette ligne, on arrivait à une équation susceptible d'être simplifiée par un déplacement de l'origine, ce qui conduisait à prendre l'axe radical pour axe des y. Beaucoup d'élèves ne l'ont pas vu. Ayant trouvé un terme de la forme $(x-\alpha)^2$, au lieu de changer $x-\alpha$ en x, ce qui abrégeait beaucoup, ils ont développé et obtenu une expression compliquée. Il était pourtant possible de tirer un bon parti de l'équation obtenue, en conservant $(x-\alpha)^2$. Il aurait suffi pour cela, suivant l'excellent conseil de M. P. Serret (*voir* p. 49), de ne pas développer, dès le commencement, les diverses fonctions qui entrent dans le calcul, et de les retenir au contraire jusqu'à la fin sous leur forme la plus concise.

Toute transformation algébrique sans but nettement déterminé constitue une opération mécanique, inintelligente, ne pouvant conduire à un résultat que par hasard. Or, il n'est pas prudent de compter sur le hasard dans une composition. L'Algèbre est comme un instrument qui n'a de valeur que par l'intelligence qui le met en œuvre. Sous ce rapport, le correcteur a reconnu chez un grand nombre d'élèves la mauvaise habitude d'abandonner la réflexion pour le calcul. On a groupé des termes, complété des carrés, décomposé des produits, etc., tout cela sans but apparent, et, disons-le aussi, sans résultat. Que pouvait espérer l'élève qui, après avoir obtenu une équa-

tion fort simple, ce qui est déjà un grand bonheur, a perdu beaucoup de papier et, chose bien plus précieuse, beaucoup de temps, à la compliquer sous cette forme étrange :

$$[(x-d)^2+y^2]\ r^4+[y^2+(x-d)^2-\mathrm{R}^2]\ (d^2x^2-2\mathrm{R}^2dx)$$
$$+(x^2+y^2)(\mathrm{R}^4-2\mathrm{R}^2r^2+2\mathrm{R}^2dx-\mathrm{R}^2dx)=0 ?$$

Sans doute, il était à la recherche de quelque artifice de calcul et il espérait le trouver sur sa route. Mais les artifices de calcul sont comme l'esprit, il ne faut pas courir après. D'ailleurs, ces décompositions savantes, au moyen desquelles on résout en deux traits de plume des problèmes fort difficiles, ont été imaginées le plus souvent après coup, par des gens dénués d'initiative, qui connaissaient le résultat d'avance et s'arrangeaient de manière à le *retrouver*.

L'équation obtenue, il s'agissait d'en tirer parti. Il fallait pour cela traiter un cas assez étendu, par exemple celui des cercles extérieurs, et faire ensuite varier les données d'une manière continue. On obtenait aisément, et par l'application des plus simples règles de la Géométrie analytique, une courbe composée de deux branches, symétriques par rapport à l'axe des x, rencontrant cet axe en un même point, qui est pour chaque branche un point d'inflexion. Il existe deux asymptotes parallèles à l'axe des y.

Pour obtenir ensuite la courbe dans les autres cas, on pouvait faire décroître progressivement la ligne des centres, et l'on trouvait une cissoïde dans le cas des cercles tangents extérieurement, deux branches séparées l'une de l'autre dans le cas des cercles extérieurs, de nouveau une cissoïde dans le cas des cercles tangents intérieurement ; une courbe analogue à celle trouvée en premier lieu, dans le cas des cercles extérieurs, laquelle passe tout entière

à l'infini quand les deux cercles deviennent concentriques. L'équation de la courbe montrait que le rayon de la circonférence (C') ne pouvait avoir aucune influence sur la forme du lieu. Ainsi, les cas de $R > R'$, $R = R'$, $R < R'$, examinés par quelques-uns, ne présentaient aucun intérêt.

D'ailleurs, la partie de l'énoncé où l'on demandait la forme de la courbe suivant les diverses positions relatives des deux cercles traçait clairement la marche à suivre dans la discussion.

Telles sont les observations du correcteur en ce qui concerne le fond de la question. Pour ce qui regarde la forme, il a trouvé quelques compositions très-bien rédigées, d'autres passablement, et d'autres tout à fait mal. Quelques-unes même ressemblaient à des notes prises à la volée, comme on les écrirait en assistant à un cours. En voici des échantillons textuels :

« On voit donc que ces directrices (celles des asymptotes) sont deux fois l'axe de y, et les deux autres sont imaginaires. »

« Le lieu prend la forme $0 = 0$. »

« Telle est l'éq. des 2 tg. »

« Si $x - x_1 = 0$, $y'_1 = y'$ donc tg. »

« Le lieu est tangent en R à l'axe des x. »

« Cherchons l'intersection de (1) avec (6); ou avec une comb. de (1) et de (6). »

« En substituant nous aurons pour (5). »

« Deux points A', A'' d'abscisses a', a'' (*). »

« Une pp à OO''. »

(*) On dit quelquefois une *ellipse d'axes a* et *b*, un *cercle de rayon* R, etc., mais à tort; dirait-on un *cercle de rayon deux mètres?* Le respect de la langue et la profondeur peuvent très-bien se concilier, comme l'ont montré par leur exemple les plus grands géomètres.

« Il me vient pour le lieu. »

« y sera imaginaire pour des valeurs $>$ ou $<$. »

Les élèves peuvent être rangés dans trois catégories : 1° ceux qui calculent sans réfléchir ; 2° ceux qui calculent d'abord et réfléchissent ensuite ; 3° ceux qui commencent par réfléchir et ne calculent que pour développer leur pensée. Ces derniers sont seuls capables de bien rédiger, car, maîtres de leur sujet, ils peuvent en exposer les diverses parties dans l'ordre le plus convenable et avec la précision nécessaire. Une bonne exposition est donc une preuve d'intelligence et de goût, qualités précieuses dont le correcteur comme l'examinateur ne peuvent manquer de tenir compte dans leur appréciation. P.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Frenet, *professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.*

« Permettez-moi de recourir à la publicité de votre excellent journal pour une petite question de priorité. Dans le beau *Traité de Calcul différentiel* que vient de publier M. Bertrand, on trouve, n° 590, des formules relatives aux courbes à double courbure, et qui sont l'expression du théorème que voici :

» *Le rapport des flexions d'une courbe en un point*
» *est égal au rapport des accroissements que subissent,*
» *en passant de ce point à un point infiniment voisin,*
» *les cosinus des angles d'une droite quelconque avec la*
» *tangente et l'axe* (*). »

(*) L'*axe* est ici la perpendiculaire au plan osculateur (*Thèse*, p. 35).

» Ces formules, attribuées par M. Bertrand à M. Serret, je les ai revendiquées pour mon compte dans un travail qui fait partie du tome XII des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Il est vrai que ce volume est celui de l'année 1853, tandis que l'extrait d'une lettre, où M. Serret les a démontrées pour la première fois, figure dans l'édition du grand ouvrage de Monge (p. 561), publiée par M. Liouville en 1850. Mais je renouvelle ici une affirmation déjà consignée dans le tome XII des *Nouvelles Annales*, et que le témoignage de M. Liouville appuierait au besoin : c'est que, dès l'année 1847, l'illustre rédacteur du *Journal de Mathématiques* avait entre les mains un manuscrit de moi contenant ces formules et plusieurs de leurs conséquences. Aussitôt que la nouvelle édition de l'œuvre de Monge me fut connue, et ce ne fut qu'en 1852, j'adressai une réclamation à M. Liouville, qui voulut bien l'accueillir et fit insérer mon travail dans le journal qu'il dirige. Toutefois, je suis bien loin de m'étonner que M. Bertrand, dont j'ai d'ailleurs personnellement éprouvé l'esprit de justice et l'extrême obligeance, ait pensé que M. Serret avait le premier donné ces formules, car il a ignoré jusqu'ici l'existence de tout document imprimé sur ce sujet-là antérieurement à 1850. Mais la vérité est qu'il existe un tel document, dont l'impression remonte au mois de juillet 1847 ; c'est le programme même de la Thèse dont le *Journal de Mathématiques* de 1852 contient le résumé. Dans l'exemplaire de ce programme que j'ai l'honneur de vous envoyer avec cette lettre, vous trouverez, Monsieur le Rédacteur, l'énoncé littéral du théorème que je cite en commençant, théorème qui n'est que la traduction géométrique de mes formules, et dans l'expression duquel M. Serret s'est naturellement rencontré avec moi, en écrivant une des Notes dont il a enrichi la sixième

édition du *Traité élémentaire* de Lacroix (*). Cette pièce imprimée, que je remets en vos mains, et qui porte une date irrécusable, me paraît justifier pleinement ma réclamation de priorité. »

Note du Rédacteur. — Thèse sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes quelconques; par F. Frenet, ancien élève de l'École Normale, professeur de Mathématiques spéciales au collége royal de Toulouse. Toulouse, typographie de A. Chauvin et Cie; 1847; in-4 de 36 p. A la page 35 commence le *Programme d'une Thèse sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure*. Le théorème revendiqué s'y trouve au premier alinéa dans les termes cités plus haut. La réclamation de M. Frenet est donc parfaitement fondée. Il est fâcheux que M. Frenet ait été moins explicite dans l'extrait qu'il a donné en 1852. Pour qu'un théorème frappe l'esprit du lecteur, il faut qu'il soit énoncé, et il ne suffit pas qu'on puisse le conclure du rapprochement de quelques formules.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XIX.

Le Roux (F.-P.), professeur de Géométrie élémentaire et de Géométrie descriptive à l'École du Conservatoire des Arts et Métiers. — *Cours de Géométrie élémentaire*. Paris, 1862-64. In-12 de 502 pages.

Cours méthodique, où la rigueur ne nuit pas à la simplicité. L'auteur ne définit pas la ligne droite, en quoi nous l'approuvons. Les figures en blanc sur fond noir contiennent, quand cela peut se faire, l'objet de la démonstration, les hypothèses

(*) M. Serret s'exprime ainsi :

« *Si* α *et* λ *désignent les angles formés avec une droite fixe* D *par la tan-*
» *gente et par l'axe du plan osculateur en un point d'une courbe à double*
» *courbure, le rapport* $\frac{d.\cos\lambda}{d.\cos\alpha}$ *est indépendant de la droite, et sa valeur est*
» *égale au rapport de la première courbure à la seconde.* » (Lacroix, 6e édition, t. II, p. 149.)

et quelquefois les calculs qui justifient la conclusion. L'élève qui veut revoir la Géométrie peut donc, à l'inspection des figures, embrasser l'ensemble des raisonnements.

XX.

Remoortere (G.-E. Van), capitaine de cavalerie belge. — *Traité de Géométrie plane, suivi d'un recueil de problèmes généraux et d'une théorie développée des maximums et des minimums.* Gand, Annoot-Braeckman. In-8 de 264 pages; 1864.

« Une ligne droite est une ligne telle, que si, de chacun de ses points, l'œil fixe un autre quelconque de ceux-ci, tous les points de cette ligne placés en avant de l'œil se confondront pour lui en un seul. » Cela revient à peu près à la définition donnée par Platon, au rapport de Proclus, que la ligne droite est celle de laquelle les parties du milieu ombragent les extrêmes; mais Platon a peut-être dit cela de la ligne droite dans un de ses dialogues, sans y attacher l'idée d'une définition pour des commençants. L'auteur paraît être de ceux qui se désolent de ne pouvoir démontrer le *postulatum* d'Euclide. Il n'ose l'admettre comme évident, mais il donne la démonstration de Legendre sur l'égalité de la somme des angles d'un triangle à deux droits, sans se dissimuler son insuffisance. La Géométrie, elle aussi, a ses esprits timorés : l'inquiétude les poursuit,

... et post equitem sedet atra cura.

XXI.

Castelnau, professeur au collége Stanislas. — *Note sur quelques opuscules mathématiques de feu P.-L. Frizon.* In-8 de 16 pages. Paris, 1864.

Pierre-Laurent Frizon, né à Paris le 5 décembre 1776, mort à son domaine de Belébat, le 14 février 1861, chef de bureau au Ministère de la Marine, a laissé sur les Mathématiques, qu'il aimait passionnément, un grand nombre de manuscrits. M. Castelnau en publie deux extraits, qui pourront être suivis de plu-

sieurs autres, si le public s'y intéresse : 1° Détermination immédiate de la somme des puissances semblables des racines d'une équation; 2° Règle pour former immédiatement l'une quelconque des réduites d'une fraction continue en fonction des numérateurs et des dénominateurs de ses fractions intégrantes.

Le premier travail est une fort bonne démonstration de la règle de Waring. Il est, comme le second, tiré d'un Mémoire sur lequel M. Cauchy a fait, en 1826, un Rapport favorable. On ne peut qu'encourager M. Castelnau à continuer ces extraits.

XXII.

CREMONA. — *Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée.* In-4 de 4 pages. (Extrait du *Journal de Crelle*, t. LXIII.)

Nuove Ricerche... *Nouvelles Recherches de Géométrie pure sur les cubiques gauches et spécialement sur la parabole gauche.* In-4 de 14 pages. (Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.*)

Ces deux Mémoires, peu susceptibles d'extraits, font suite au Mémoire du même auteur inséré dans les *Nouvelles Annales.*

XXIII.

VAN DER MENSBRUGGHE, répétiteur à l'École du génie civil à Gand. — *Sur quelques propriétés générales des polygones réguliers.* In-8 de 12 pages. (Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* 2e série, t. XVII.)

S_m désignant la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des projections des côtés d'un polygone régulier sur un axe quelconque; a désignant le côté de ce polygone, et n le nombre des côtés, on a

$$S_m = 0 \quad \text{ou} \quad S_m = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m} na^m,$$

suivant que m est pair ou impair.

NOTE SUR LES HOMOGÈNES;

PAR AELT.

M. Terquem, d'excellente mémoire, a souvent préconisé dans ce journal l'emploi des équations homogènes en Géométrie analytique. Mais il faut convenir que pour rendre facile aux étudiants l'intelligence et la pratique de cette théorie d'ailleurs si utile, il était indispensable d'en expliquer la signification géométrique. C'est ce que M. Painvin vient de faire en montrant (ci-dessus, p. 145) que par la substitution de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ à x et y, dans une équation à deux variables, on obtient l'équation d'une projection centrale (*d'une perspective*) de la figure que représentait la première équation. Je crois pouvoir ajouter ici quelques éclaircissements qui à la vérité n'étaient pas nécessaires pour l'objet que M. Painvin avait immédiatement en vue.

Premièrement, puisque $z = 0$ doit être l'équation d'une droite, cette lettre z doit représenter une fonction linéaire des deux autres variables. De plus, pour ne pas blesser le principe même *de l'homogénéité*, les termes de cette fonction doivent être de degré nul.

La transformation dont il s'agit revient donc à remplacer

$$x \quad \text{par} \quad \frac{x'}{ax' + by' + 1},$$

$$y \quad \text{par} \quad \frac{y'}{ax' + by' + 1},$$

sauf à effacer les accents et à écrire pour dénominateur la lettre z.

Et dès lors on voit bien ce que c'est que faire $z = 1$; c'est annuler les coefficients des variables dans la fonction $ax' + by' + 1$; c'est donc rendre infinis les segments que la droite $ax' + by' + 1 = 0$ fait sur les nouveaux axes. Et puisqu'on reproduit alors la première équation, c'est que l'équation transformée représente une figure où une droite à une distance finie correspond à une droite qui dans la figure primitive est tout entière à l'infini.

Mais pour plus de précision, je vais montrer que quel que soit l'angle θ des axes des x et y avec lesquels a été construite la figure représentée par la première équation, et quel que soit aussi l'angle θ' des nouveaux axes avec lesquels aura été construite la figure de l'équation en x' et y', ces figures peuvent être placées de sorte que l'une d'elles soit la projection centrale (ou *perspective*) de l'autre.

Je remarque d'abord qu'en vertu des relations

$$x = \frac{x'}{ax' + by' + 1}, \quad y = \frac{y'}{ax' + by' + 1},$$

ou de leurs équivalentes

$$x' = -\frac{x}{ax + by - 1}, \quad y' = -\frac{y}{ax + by - 1},$$

les axes des x et des x' doivent se correspondre, comme aussi ceux des axes des y et des y'. De sorte que, si O et O' sont les deux origines, le centre C de la projection centrale est nécessairement sur la droite OO'.

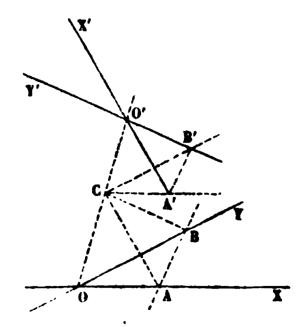
En second lieu, un point quelconque de la droite

$$ax + by - 1 = 0$$

de la première figure passant à l'infini sur la seconde, si on appelle A et B les points où elle rencontre les axes

des x et des y, de sorte que $OA = \frac{1}{a}$, et $OB = \frac{1}{b}$, le plan CAB est nécessairement parallèle au plan de la seconde figure. De plus, à cause de la correspondance des axes OX et OY avec les axes O′X′ et O′Y′ respectivement, l'angle $\widehat{ACB}$ est égal à l'angle θ' de ces deux derniers axes.

Donc, si on construit sur AB un segment capable de



l'angle θ' et qu'on fasse tourner ce segment autour de AB, le point C, centre de la perspective, est quelque part sur cette surface. D'ailleurs, un plan A′CB′ mené par le point C parallèlement au plan des xy doit couper le plan des X′Y′ selon une droite A′B′ dont les points se projetteront à l'infini sur le premier des deux, c'est-à-dire selon la droite dont l'équation est

$$ax' + by' + 1 = 0.$$

Menant donc le plan A′O′B′ parallèle au plan ACB, on doit avoir

$$O'A' = -\frac{1}{a}, \quad B'O' = -\frac{1}{b},$$

c'est-à-dire que

$$A'O' = AO \quad \text{et} \quad B'O' = BO.$$

Et comme les triangles ACB, A′O′B′, sont semblables, on a manifestement

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB}.$$

Imaginons donc qu'après avoir décrit sur AB le segment capable de l'angle θ', on construise dans le même plan (soit dans le plan des xy) la circonférence qui est le lieu des points dont les distance aux extrémités de AB sont dans le rapport $\frac{OA}{OB}$; enfin, soit D le point de rencontre de ce segment et de cette circonférence. Si on fait tourner la figure autour de AB, le point D décrira un cercle qui sera le lieu des points C.

La détermination du plan A′O′B′ relative à une situation particulière de ce point C est facile, puisque le triangle A′CB′ est semblable à AOB et que le côté A′B′ est connu comme troisième côté du triangle A′O′B′ dont on connaît l'angle en O′ avec les deux côtés qui le comprennent.

Nota. — On propose de donner la signification géométrique de la transformation homogène dans le cas d'une équation entre les trois coordonnées de l'espace x, y et z.

NOTE

Sur le lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante ;

Par M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

I. *Normale à la surface.*

Désignons par a la somme constante des distances d'un point de la surface aux deux droites fixes. On reconnaît

aisément que la somme des distances à ces droites d'un point extérieur à la surface est plus grande que a. Le point de contact d'un plan tangent est dont le point de ce plan dont la somme des distances aux deux droites est minimum.

Dès lors se présente la question suivante :

Quel est sur un plan le point dont la somme des distances à deux droites fixes est minimum ?

Nous supposerons que le plan ne rencontre pas la plus courte distance des droites entre les deux pieds de cette plus courte distance, sans quoi le point cherché serait évidemment le point d'intersection.

Soient X et Y les deux droites et P le plan. Que l'on prenne la droite Y' symétrique de Y par rapport à P, la somme des distances d'un point quelconque du plan aux deux droites X, Y' est la même que la somme des distances de ce même point aux deux droites X, Y. Or le point du plan dont la somme des distances aux deux droites X, Y' est minimum, est évidemment le point où la plus courte distance de ces deux droites rencontre le plan (*). De là on déduit facilement que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites fixes X, Y sont dans un plan perpendiculaire au plan P, et sont également inclinées sur ce plan. Donc :

Théorème I. — *La normale menée à la surface par un point de cette surface est la bissectrice de l'angle que forment les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites.*

On peut, du reste, reconnaître *à posteriori* que si M est un point de la surface, le point M', infiniment voisin

(*) J'indique ici la solution générale du problème ; je ne m'arrête pas aux cas particuliers.

de M, situé dans le plan des deux perpendiculaires MA, MB, sur la droite qui fait avec MA et MB, de part et d'autre, des angles égaux, appartient aussi à la surface; car, λ désignant l'angle M'MA, on a

$$M'A' = MA - MM' \cos\lambda,$$
$$M'B' = MB + MM' \cos\lambda,$$

par suite,

$$M'A' + M'B' = MA + MB.$$

De même, le point M'', infiniment voisin de M, situé sur la perpendiculaire au plan MAB, appartient aussi à la surface, puisque ses distances aux deux droites fixes sont égales, respectivement, aux distances du point M à ces deux droites. La normale en M, devant être perpendiculaire aux deux droites MM', MM'', est donc bien la bissectrice de l'angle AMB.

Si, sur la normale à la surface, on prend un point M''', infiniment voisin de M, la différence des distances de ce point M''' aux deux droites fixes est égale à la différence des distances du point M à ces deux droites. D'ailleurs, la différence des distances du point M'' aux deux droites est aussi égale à la différence des distances du point M; donc :

Théorème II. — *La normale, en un point* M, *au lieu des points dont la différence des distances* MA, MB *à deux droites fixes est constante, est la bissectrice de l'angle formé par l'une de ces perpendiculaires et le prolongement de l'autre.*

Corollaire. — *Le lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante, et le lieu des points dont la différence des distances à ces deux mêmes droites est aussi constante, se coupent orthogonalement.*

II. *Lignes de courbure de la surface.*

Nous ne considérerons dans cette première Note que le cas où les deux droites sont rectangulaires et situées dans le même plan, nous réservant de traiter dans une autre le cas général.

La normale en M est bissectrice de l'angle des deux perpendiculaires MA, MB, abaissées sur les deux droites fixes OX, OY; elle rencontre AB en un point I tel que $\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BM}$. Prenons le point M′ de la surface, infiniment voisin de M dans le plan normal AMB : il se projette sur les deux droites en A′ et B′; et si l'on désigne par λ l'angle que forme MM′ avec MA, par φ et ψ les angles que forme le plan MAB avec les plans perpendiculaires aux droites OX, OY, menés par le point M, on a

$$AA' = MM' \sin\lambda \sin\varphi,$$
$$BB' = MM' \sin\lambda \sin\psi.$$

Soit H le point où la droite A′B′ rencontre AB; si du point H comme centre on décrit, entre AB et A′B′, deux arcs de cercle AP et BQ, on aura

$$AP = AA' \sin A = MM' \sin\lambda \sin\varphi \sin A,$$
$$BQ = BB' \sin B = MM' \sin\lambda \sin\psi \sin B;$$

par suite,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{\sin\varphi \sin A}{\sin\psi \sin B}.$$

Soit K la projection du point M sur le plan XOY : on a

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{BK}{MB} : \frac{AK}{MA} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{\cos A}{\cos B},$$

d'où

$$\frac{HA}{HB} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{\sin A \cos A}{\sin B \cos B},$$

ou, les angles A et B étant complémentaires,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{MA}{MB}.$$

Le point d'intersection des deux droites infiniment voisines AB, A′B′, est donc le point I. Dès lors la normale en M′ qui coupe A′B′ en un point infiniment voisin de I forme avec le plan normal IMM′ un angle infiniment petit du second ordre ; MM′ est donc l'élément d'une ligne de courbure de la surface. Par conséquent, en chaque point de la surface, l'une des lignes de courbure est dirigée dans le plan normal que déterminent les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites fixes.

De là et du théorème II on déduit :

Théorème III. — *Les lignes de courbure d'un système du lieu des points dont la somme des distances à deux droites rectangulaires et situées dans un même plan est constante, sont les intersections de cette surface avec toutes les surfaces lieux des points dont la différence des distances aux deux mêmes droites est une quantité constante quelconque.*

Si l'on désigne par r et t les distances d'un point aux deux droites OX, OY, les deux familles de surfaces définies par les équations

$$r + t = a,$$
$$r - t = b,$$

appartiennent donc à un système triple orthogonal.

Quelle est la troisième famille de ce système ?

On sait que dans le paraboloïde à plans directeurs perpendiculaires il existe une génératrice de chaque système qui coupe orthogonalement toutes les génératrices de l'autre système. Nous appellerons ces deux génératrices les *génératrices principales* de la surface.

Ces génératrices principales, perpendiculaires entre elles, définissent une famille de paraboloïdes à plans directeurs rectangulaires.

Considérons l'un des paraboloïdes ayant pour génératrices principales les deux droites fixes OX, OY; et soit M un point commun à ce paraboloïde et à la surface $(r+t=a)$; le plan des génératrices MA, MB est le plan tangent à ce paraboloïde : MM' est donc un élément de la courbe d'intersection des deux surfaces.

De là résulte le théorème suivant :

Théorème IV. — *Les lignes de courbure du second système de la surface* $r+t=a$ *sont les intersections de cette surface avec la famille de paraboloïdes ayant pour génératrices principales les deux droites fixes.*

Ces paraboloïdes constituent, avec les familles de surfaces définies par les équations

$$r+t=a, \quad r-t=b,$$

un système triple orthogonal.

Ce système a été obtenu par M. A. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII). Mais il n'était peut-être pas sans intérêt d'y parvenir par une voie purement synthétique.

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS DE PROPOSITIONS GÉOMÉTRIQUES;

Par M. J.-C.-G. ZENTHEN (de Copenhague).

Dans la Géométrie analytique, on détermine les courbes planes au moyen d'équations entre deux quantités variables, x et y, et les propriétés analytiques des équations

révèlent les propriétés géométriques des courbes. En représentant par x et y différentes grandeurs, variables avec le point déterminé par ces coordonnées (par exemple, ses distances à certaines droites ou à des points donnés, les rapports entre ces distances, etc.), on pourra, au moyen d'une même équation, représenter différentes courbes, et les propriétés de cette équation commune exprimeront des propriétés analogues de ces différentes courbes.

On a par là un moyen de transformer les propositions connues relatives à certaines courbes en d'autres qui se rapportent à des courbes moins examinées. L'emploi de ce moyen pour la *transformation homographique* et pour la *transformation par des polaires réciproques* est connu; mais comme en dehors de ces applications on ne s'en est pas beaucoup servi (*), je n'hésite pas à en ajouter une nouvelle.

Si x et y représentent les carrés des distances à deux points fixes F et F_1 du point qu'on veut déterminer par ces coordonnées, on peut leur donner les expressions

$$y = \eta^2 + (\xi + \alpha)^2, \quad x = \eta^2 + (\xi - \alpha)^2,$$

où ξ et η sont les coordonnées du point (x, y) prises dans un système orthogonal ayant pour axe des abscisses la droite FF_1 et pour origine le milieu du segment FF_1. Au moyen de ce système auxiliaire, on voit, tout aussi bien que par une discussion géométrique, d'abord qu'un couple de coordonnées détermine (outre deux points fixes imaginaires à l'infini) deux points qui peuvent coïncider ou devenir imaginaires, ensuite qu'une équation de la forme

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

(*) On trouve la plupart des autres applications connues dans le n° 258 de SALMON, *Higher plane curves*; Dublin, 1852.

qui pour un système ordinaire de coordonnées représente une droite, représente maintenant un cercle, dont le centre, toujours réel quand les constantes de l'équation sont réelles, est situé sur la droite indéfinie FF_1. Pour $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$, on sait que la droite représentée par l'équation (1) dans le cas des coordonnées ordinaires est parallèle à l'un ou à l'autre des axes ou passe par l'origine; en employant nos nouvelles coordonnées, on trouve que le cercle représenté par l'équation (1) a l'un ou l'autre des points F et F_1 pour centre quand $a = 0$ ou $b = 0$, et qu'il divise harmoniquement le segment FF_1 quand $c = 0$. Les équations $y = 0$ et $x = 0$ représentent respectivement, suivant le système qu'on adopte, les axes de coordonnées ou les cercles qui se réduisent aux points F et F_1. Si dans deux équations de la forme (1) $\frac{a}{b}$ a la même valeur, les deux droites qu'elles représentent, dans le premier système, seront parallèles, et les cercles qu'elles représentent dans l'autre auront le même centre (seront aussi parallèles). Si les coordonnées sont prises dans un système orthogonal,

$$(2) \qquad \delta = \frac{ax_1 + by_1 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

exprime la distance du point (x_1, y_1) à la droite (1); si elles sont prises dans un système de coordonnées obliques, la même distance aura pour expression $m.\delta$, m variant seulement avec $\frac{a}{b}$, et si elles sont prises dans le système représenté par les équations (a),

$$\frac{ax_1 + by_1 - c}{a + b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}\,\delta = n\delta,$$

où n aussi dépend seulement de $\frac{a}{b}$, sera l'expression de

la *puissance* (*) de chacun des points (x_1, y_1) relativement au cercle représenté par l'équation (1).

Au moyen de ces considérations, on peut trouver pour un système de cercles des propositions analogues à celles qui concernent un système de droites; mais nous avons pour but de transformer d'autres propositions.

Si x et y sont des coordonnées orthogonales ou obliques, l'équation

$$(3) \qquad x.y = d$$

représente une hyperbole équilatère ou ordinaire qui a les axes coordonnés pour asymptotes. Une droite quelconque parallèle à la droite

$$(4) \qquad ax + by = 0$$

rencontre l'hyperbole en deux points (réels ou imaginaires) qui sont, au signe près, à la même distance de la droite

$$(5) \qquad ax - by = 0.$$

Les droites (4) et (5), si l'hyperbole est équilatère, forment en sens opposé les mêmes angles avec les asymptotes, et en tout cas elles divisent harmoniquement les angles formés par les asymptotes. Une droite parallèle à la droite (4) menée par le point où la droite (5) rencontre la courbe sera une tangente.

Si x et y sont des coordonnées du nouveau système, l'équation (3) représente une *cassinienne* ou une *ellipse*

(*) On appelle *puissance* d'un point relativement à un cercle, la valeur constante du produit des deux segments que détermine ce cercle sur une droite passant constamment par le point, ces segments étant comptés depuis le point fixe jusqu'à ceux où la droite rencontre le cercle. La puissance ainsi définie sera positive ou négative, suivant que le point sera extérieur ou intérieur au cercle.

de Cassini, c'est-à-dire *le lieu des points dont les distances à deux points fixes donnent un produit constant.* Les équations (4) et (5) représentent maintenant deux cercles (dont l'un est imaginaire) qui divisent harmoniquement le segment FF_1 et dont les deux centres A et B, tous deux réels, divisent aussi harmoniquement le même segment. Un cercle quelconque qui a son centre au point A [centre du cercle (4)] rencontrera la courbe en quatre points formant deux couples de points qui respectivement ont les mêmes coordonnées et sont situés symétriquement par rapport à la droite FF_1. L'un des couples ou tous les deux peuvent être imaginaires. On voit que la puissance d'un point de l'un de ces couples relativement au cercle (5) est au signe près la même que celle d'un point de l'autre. Si l'un des couples est sur le cercle (5), l'autre y sera également, et par conséquent le cercle qui a son centre en A et passe par un des points de rencontre de la courbe avec le cercle (5), passant aussi par l'autre point du même couple, est, en ces deux points, tangent à la courbe. Par conséquent :

Deux points A *et* B *divisant harmoniquement le segment* FF_1 *formé par les deux foyers d'une cassinienne, si l'on décrit un cercle* (B) *qui a son centre au point* B *et qui divise aussi harmoniquement le segment* FF_1, *tout cercle qui aura son centre au point* A *rencontrera en général la courbe en quatre points dont les puissances relativement au cercle* (B) *ne diffèrent que par le signe.*

Et lorsqu'on fera passer ce cercle par un des deux couples de points P *et* P', *symétriquement situés par rapport à la droite* FF_1 *auxquels le cercle* (B) *rencontre la courbe, il sera tangent à la courbe en ce couple de points.*

Si le point B est pris sur le prolongement de FF_1, le

cercle (B) sera réel, et l'un des couples de points où il rencontre la cassinienne pourra être réel.

Les foyers F et F_1 et le point P de la courbe étant donnés, on pourra, par des constructions bien simples, déterminer le point B et ensuite le point A, et la droite AP sera la normale de la courbe au point P. Nous pourrons ainsi, *quand les deux foyers et un point d'une cassinienne seront donnés, construire la tangente et la normale en ce point de la courbe.*

Si le point P est situé sur la droite FF_1, le point A sera le centre du cercle qui au point P a un contact du troisième ordre avec la courbe.

Si les points F, F_1 *et* A *sont donnés en ligne droite, on pourra construire le cercle* (B) *qui est le lieu des pieds des normales menées par le point* A *à toutes les cassiniennes ayant* F *et* F_1 *pour foyers.*

Dans les *Nouvelles Annales* (1861, p. 70), le théorème 26 énonce qu'*un système de cassiniennes ordinaires de mêmes foyers est coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères passant par les foyers et dont les centres coïncident avec celui des cassiniennes.* Cela se prouve très-facilement au moyen de notre théorème. En effet, faisons passer une hyperbole remplissant les conditions indiquées par un point arbitraire P d'une quelconque d'entre nos cassiniennes homofocales; menons par le point P la corde conjuguée du diamètre FF_1, et supposons qu'elle rencontre FF_1 en B'. On aura la relation

$$\overline{B'P}^2 = \overline{B'F}.\overline{B'F_1}.$$

Mais on a aussi

$$\overline{BP}^2 = \overline{BF}.\overline{BF_1},$$

et cette relation ne détermine sur FF_1 qu'un seul point B

(le point de rencontre avec la droite qui au point P est tangente au cercle passant par P, F et F_1). Donc les points B et B′ coïncident. Le point A, qui est le conjugué harmonique de B relativement au segment FF_1, aura par conséquent PB pour polaire relativement à l'hyperbole; d'où il suit que la droite PA, qui est normale à la cassinienne au point P, est tangente à l'hyperbole au même point. Donc, etc.

La première partie de notre théorème sert *à trouver*, au moyen de la règle et du compas, *les foyers d'une cassinienne déjà décrite et dont on connaît l'axe.*

Les hyperboles qui ont les mêmes asymptotes sont semblables et semblablement placées, ayant leur centre de figure pour centre de similitude. On détermine des points correspondants par les droites dont les équations ont la forme (5). A ces hyperboles correspondent, comme nous l'avons montré, un système de cassiniennes homofocales, et les équations de la forme (5) représentent, au même temps, des cercles ayant leurs centres sur la droite FF_1 et divisant harmoniquement le segment FF_1. Prenons deux de ces cassiniennes que nous désignerons par (C) et (*c*), et deux de ces cercles (A) et (A_1); supposons que P et P′ forment le couple d'intersection de (C) et (A) dont les coordonnées x et y sont positives et qui seul peut être réel; appelons P_1 et P'_1 les points analogues pour (C) et (A_1), p et p' pour (*c*) et (A), p_1 et p'_1 pour (*c*) et (A_1).

D'une transformation de théorèmes connus relatifs à des figures semblables et semblablement placées on conclut : 1° que

$$\frac{FP}{Fp} = \frac{FP_1}{Fp_1} = \frac{F_1P}{F_1p} = \frac{F_1P_1}{F_1p_1},$$

et 2° que le cercle passant par les points P, P′, P_1 et P'_1

et celui qui passe par les points p, p', p_1 et p'_1 ont le même centre.

Au moyen de notre système de coordonnées, on peut encore trouver beaucoup d'autres propriétés des cassiniennes. Il sera aussi utile, pour trouver des propriétés d'autres courbes, par exemple celles des *ovales de Descartes* ou des *courbes aplanétiques* qui auront l'équation

$$a.x^{\frac{1}{2}} + b.y^{\frac{1}{2}} = c,$$

équation qui pour des coordonnées ordinaires représente une parabole tangente aux deux axes.

J'ai inséré la plus grande partie de ce que je viens d'exposer dans le *Journal de Mathématiques de Copenhague*, comme faisant suite à un essai d'une théorie générale et géométrique de cette espèce de transformations.

Nous ajouterons encore, sans démonstration, une manière de faire, au moyen de projections, la transformation d'une figure dont les points sont déterminés par des coordonnées ordinaires, orthogonales ou obliques, x et y, en une autre dont les points correspondants sont déterminés, dans le nouveau système que nous avons employé, par des coordonnées X et Y, liées à x et y par les équations

$$X = \lambda.x, \quad Y = \mu.y,$$

λ et μ étant des quantités constantes. La manière est la suivante :

On projette centralement la figure donnée sur une sphère touchant, aux points S *et* S_1, *les deux plans qui projettent les axes coordonnés, et au point* T *le plan mené par le centre de projection parallèlement au plan de la figure. Avec le point* T *comme centre, on pro-*

jette stéréographiquement la figure formée par la première projection, et l'on a la figure cherchée; les projections des points S *et* S_1 *sont les points fixes du système des coordonnées.*

On trouve comme corollaires les propositions suivantes :

1° *Lorsque deux plans tangents à un cône du second degré ainsi que le plan des génératrices de contact touchent une sphère, les deux premiers aux points* S *et* S_1, *le dernier au point* T, *si, en prenant* T *comme centre, on projette stéréographiquement la courbe d'intersection des deux surfaces, la projection sera une cassinienne ayant pour foyers les projections de* S *et de* S_1. *Réciproquement, la courbe sphérique dont la projection stéréographique est une cassinienne se trouve sur un cône du second degré situé de la manière que nous venons d'indiquer.*

2° *Les quatre plans tangents communs à un cône du second degré et à une sphère étant réels et ayant pour points de contact avec la sphère* Q, R, S et T, *si, prenant le point* T *comme centre, on projette stéréographiquement la courbe d'intersection des deux surfaces, la projection sera une ligne aplanétique dont les foyers sont les projections des points* Q, R et S. *Réciproquement, la courbe sphérique dont la projection stéréographique est une ligne aplanétique se trouve sur un cône du second degré situé de la manière que nous venons d'indiquer.*

Nous voyons donc qu'une ligne aplanétique a trois foyers, ce qu'on peut aussi prouver sans employer des considérations stéréométriques. Si, par une extension de la définition de ces courbes, on adopte aussi des lignes aplanétiques dont deux foyers sont imaginaires, il suffit que l'un des couples de plans tangents communs au cône et à la sphère soit réel.

M. Quetelet, dans le tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, a démontré que la courbe sphérique qui donne pour projection stéréographique une ligne aplanétique dans une *certaine position particulière* par rapport à la sphère, est située sur un cône du second degré. Néanmoins, on ne trouverait pas le cône dont ce savant fait usage comme un cas particulier de ceux que nous venons d'indiquer. Mais on doit se souvenir qu'une courbe sphérique située sur un cône du second degré est aussi sur trois autres. M. Quetelet prend pour base de son cône un cercle dont le centre est le point de l'œil ou le centre de projection, dont le plan est tangent à la sphère et dont le rayon est égal à celui de la sphère; notre cône devient dans ce cas un cylindre hyperbolique.

NOTE SUR LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

Par M. MOUTARD.

La transformation d'une surface algébrique par rayons vecteurs réciproques fournit en général une transformée d'un degré double; il n'y a d'exception à cette règle que lorsque la surface proposée contient le *cercle de l'infini* ou le pôle de transformation.

Désignons :

1° Par m le degré d'une surface;

2° Par p le degré de multiplicité du pôle, c'est-à-dire le nombre des points d'intersection de la surface avec une transversale quelconque issue de ce pôle qui sont confondus en ce point ($p = 0$, pour un pôle extérieur);

3° Par q le degré de multiplicité du cercle de l'infini, c'est-à-dire le nombre des nappes de la surface qui le contiennent;

4° Enfin, par m', p', q', les nombres analogues aux précédents, relatifs à la surface transformée par rayons vecteurs réciproques.

Ces six nombres sont liés entre eux par les trois relations :

$$m' = 2m - p - 2q,$$
$$p' = m - 2q,$$
$$q' = m - p - q,$$

ou leurs équivalentes

$$m = 2m' - p' - 2q',$$
$$p = m' - 2q',$$
$$q = m' - p' - q'.$$

Lorsque $p + 2q = m$, la transformation n'altère ni le degré de la surface, ni le degré de multiplicité du pôle, ni le degré de multiplicité du cercle de l'infini.

Certaines de ces surfaces jouissent en outre de la propriété de se transformer exactement en elles-mêmes, pour un choix convenable du pôle et du paramètre de transformation. Je propose de leur donner le nom d'*anallagmatiques* (ἀ privatif, ἀλλάσσω, je change), et j'appellerai *pôle principal* (*) tout pôle pour lequel cette condition est réalisée, et *sphère principale* une sphère ayant pour centre un pôle principal, et pour carré de son rayon le paramètre de transformation correspondant.

Toute surface anallagmatique peut être définie comme le lieu des intersections successives d'une sphère assu-

(*) *Voir* dans l'*Institut* l'extrait du procès-verbal de la séance de la Société Philomathique du 15 décembre 1860.

jettie à couper orthogonalement la sphère principale, et dont le centre décrit une surface directrice fixe. Lorsque la surface directrice admet des génératrices rectilignes, la proposée admet des génératrices circulaires; lorsque la directrice est développable, l'un des systèmes de lignes de courbure de la proposée consiste en circonférences de cercle.

Les surfaces du troisième ordre, qui contiennent le cercle de l'infini, et les surfaces du quatrième ordre, qui contiennent ce cercle comme ligne double, sont en général anallagmatiques par rapport à cinq pôles différents, parmi lesquels trois au moins sont réels. Les cinq sphères principales se coupent deux à deux orthogonalement; de là dérive pour les cinq pôles principaux une relation de positions remarquable: la droite qui joint deux quelconques d'entre eux est nécessairement perpendiculaire au plan des trois autres, ou, ce qui revient au même, chacun des tétraèdres qui a pour sommets quatre des pôles principaux est tel, que ses hauteurs concourent en un même point, et ce point de concours est lui-même le cinquième pôle principal. Si on prend pour pôle de transformation le point de concours des hauteurs de l'une quelconque des faces de ces tétraèdres, avec un paramètre de transformation convenable, la transformée est symétrique de la proposée par rapport à la face du tétraèdre. Nommant un pareil point *pôle secondaire,* on voit qu'il existe en général dix pôles secondaires pour les anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre. Dans le cas du troisième ordre, les cinq pôles principaux et les dix pôles secondaires sont situés sur la surface.

Les sphères doublement tangentes à une anallagmatique du troisième ou du quatrième ordre la coupent suivant deux cercles. Toutes ces sphères forment cinq systèmes différents dont les centres sont situés sur les cinq

surfaces directrices correspondantes aux cinq pôles principaux ; ces directrices sont des surfaces homofocales du second degré, dont le centre commun jouit de propriétés remarquables. Pour le troisième degré, ce centre est rejeté à l'infini.

Tout pôle principal d'une anallagmatique du quatrième ordre est le sommet d'un cône du second degré dont chaque génératrice est doublement tangente à la surface, et dont la courbe de contact est située sur une sphère concentrique aux surfaces directrices. On conclut aisément de là que par un point de la surface on peut mener en général dix sections circulaires, ou, ce qui revient au même, que les plans doublement tangents à la surface se répartissent suivant les plans tangents à cinq cônes du second degré.

Les courbes d'intersection de la surface et des sphères principales renferment divers points remarquables, parmi lesquels les ombilics ; mais je me borne ici à signaler leur existence, ainsi que celle des lignes d'intersection des sphères principales et des surfaces directrices correspondantes, dont les propriétés rappellent les lignes focales des surfaces du second degré.

Je ferai remarquer, en terminant, qu'à l'aide d'une simple transformation linéaire, il est aisé de déduire des propriétés des anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre un grand nombre de propriétés de la surface générale du troisième degré et des surfaces du quatrième degré dont deux nappes se croisent suivant une même conique.

NOTE SUR LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE;

PAR M. M., ABONNÉ.

Pour calculer π, au moyen des périmètres de polygones réguliers inscrits et circonscrits à une circonférence, on se sert des formules

$$P' = \frac{2pP}{p+P}, \quad p' = \sqrt{pP'}.$$

Or ces formules peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right), \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P'}}.$$

Le calcul des valeurs inverses des périmètres est donc bien plus aisé que celui des périmètres eux-mêmes. Ces valeurs inverses, en prenant le rayon pour unité, donnent des valeurs de plus en plus approchées de $\frac{1}{2\pi}$, d'où l'on déduit finalement π.

Il y a une analogie frappante entre ces dernières formules et les formules

$$r' = \frac{R+r}{2}, \quad r' = \sqrt{Rr'},$$

qui donnent les apothèmes et les rayons des polygones dans la méthode des isopérimètres. De plus, si l'on prend pour unité la valeur commune à ces périmètres, on trouve que r' et R' prennent respectivement les mêmes valeurs que $\frac{1}{P'}$ et $\frac{1}{p'}$, pourvu que dans les deux méthodes

on parte de polygones d'un même nombre de côtés. La différence des deux méthodes est donc plus apparente que réelle.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Étant donnée une série d'ellipsoïdes homofocaux, soit un point pris arbitrairement sur l'un des axes, et considérons ce point comme le sommet des cônes circonscrits aux ellipsoïdes du système homofocal. Le lieu des courbes de contact sera une surface déterminée, et en faisant varier la position du sommet sur le même axe, on aura une série de surfaces renfermant un paramètre arbitraire. Pareillement, deux autres systèmes, dont chacun contient une constante arbitraire, s'obtiennent de la même manière, en prenant des points sur les deux autres axes pour sommets de cônes circonscrits.

Cela posé, je dis que :

1° *Les courbes dans lesquelles ces trois familles de surfaces se coupent deux à deux sont des cercles dont les plans sont perpendiculaires aux plans principaux.*

2° *Les surfaces qui appartiennent respectivement à ces trois systèmes se coupent mutuellement deux à deux à angle droit, et par conséquent, en vertu du théorème de Dupin, leurs lignes de courbure sont les cercles qui résultent de leurs intersections.*

Afin de démontrer la première partie de notre théorème, soit O le centre, et soient A, B deux points pris respectivement sur les axes des x et des y, et faisons $OA = \alpha$ et $OB = \beta$. A chaque valeur de α (et de même

de β), il répondra une surface particulière appartenant à l'une des familles dont il s'agit, et il est évident que l'intersection de la surface (α) avec la surface (β) sera le lieu des points (M) dont un quelconque est situé sur l'un des ellipsoïdes homofocaux et jouit de la propriété que le plan tangent qui y touche l'ellipsoïde coupe les axes des x et des y respectivement aux deux points donnés A et B. D'après un théorème de M. Chasles, la normale menée à l'ellipsoïde homofocal au point M perce le plan des xy dans un point P qui est le pôle de la droite AB par rapport à la conique focale située dans ce plan. Par conséquent, le point P est donné. Abaissons donc de P une perpendiculaire PQ sur AB, et le lieu de M, ou la courbe d'intersection de (α) avec (β), sera un cercle décrit avec PQ comme diamètre dans un plan perpendiculaire à AOB, ce qu'il fallait démontrer.

Pour établir la seconde partie du théorème, soient A_1, B_1 les points de rencontre de la droite AB avec les deux plans menés par le point M, respectivement parallèles aux plans yz et xz. Soit aussi M_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le plan xy ou AOB, et faisons passer par la droite MM_1 un plan perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde homofocal en M. Dans le plan qu'on détermine ainsi, menons une droite MN faisant avec le plan tangent A_1MB_1 un angle égal à celui fait par MM_1 avec le même plan. On s'apercevra facilement, par la géométrie élémentaire, que la droite MN sera la tangente en M au cercle provenant de l'intersection mutuelle des surfaces (α) et (β). Il est évident aussi que les droites MA_1, MB_1 sont les tangentes respectives aux sections elliptiques des surfaces (α) et (β) passant par M. Par conséquent, les plans NMA_1, NMB_1 touchent respectivement les deux surfaces (α) et (β) au point M, et l'angle fait par ces deux plans entre eux est évidemment

égal à celui que fait le plan MM_1A_1 avec MM_1B_1, c'est-à-dire à un angle droit. Il résulte de là que les deux surfaces (α) et (β) s'entrecoupent orthogonalement, comme nous l'avions énoncé.

CONCOURS GÉNÉRAL (*) DES LYCÉES ET DES COLLÉGES.

Classe de Philosophie. — Section des Sciences.

Composition en Mathématiques.

1re *Question.* — Étant donné un triangle ABC, on demande de mener par le sommet C une droite CD telle, que la somme des projections des côtés AC et BC sur cette droite soit égale à une longueur donnée.

On discutera le problème.

2e *Question.* — Résoudre le même problème par la Trigonométrie.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

De la question donnée en composition au concours d'admission à l'École Normale (1862);

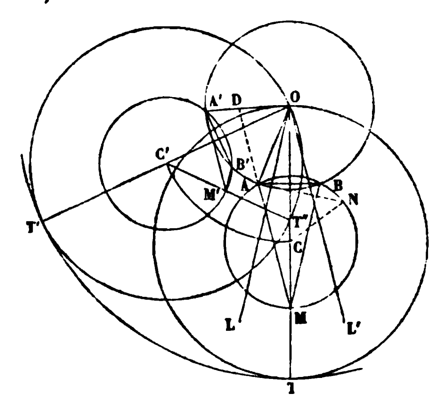
PAR M. HAAG,
Élève de l'École Polytechnique.

On donne un cercle dans lequel on a inscrit une corde AB *de longueur donnée : par les extrémités* A *et* B

(*) Innovation due à l'initiative intelligente de M. le Ministre Duruy. Nous regrettons que les classes de Mathématiques spéciales, si dignes d'intérêt, n'aient pas été admises à concourir. Il est vrai que leur nombre est trop peu considérable dans chaque Académie pour y donner lieu à un concours; mais en réunissant toutes celles des départements, on établirait entre elles une utile émulation. P.

de cette corde on mène respectivement des parallèles à deux droites données. On demande le lieu décrit par leur point d'intersection (*).

Soient OL, OL′ les deux directions données. Je considère la corde mobile dans deux positions successives : en AB où elle est perpendiculaire à la bissectrice OT de l'angle LOL′, et dans une autre position quelconque A′B′. J'appelle M, M′ les points du lieu correspondants, obtenus en menant par A et A′ des parallèles à OL′, par B et B′ des parallèles à OL. Les angles AMB, A′M′B′ étant égaux ainsi que les cordes AB, A′B′, le cercle C′ des points A′B′M′ est égal au cercle C des points ABM, et les points C, C′ sont situés sur des perpendiculaires OC, OC′ à AB, A′B′, à des distances égales du point O. Donc si des points C, C′ comme centres, avec les longueurs CO, C′O



(*) La composition comprenait en outre la question suivante : *Déterminer la limite du rapport* $\frac{x - \sin x}{x^3}$ *lorsque x tend vers zéro, et chercher quelle valeur on doit attribuer à* A, B, C *pour que l'expression*

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} - C$$

s'annule avec x.

comme rayons, on décrit deux cercles, ces cercles étant égaux, on pourra supposer que le premier, CO, vienne coïncider avec le second, C'O, en roulant dans la circonférence OT de rayon double. Je veux démontrer que dans ce mouvement le point M, considéré comme appartenant au plan du cercle mobile, vient coïncider avec le point M'. Pour cela, M'T'' étant égal à MT, il suffira de faire voir que les arcs T'T, T'T'' sont égaux, ou, ce qui revient au même, que l'angle TOT' est moitié de l'angle T'C'T''. Je prolonge la droite MA en D où elle rencontre OA', et je prends sur le cercle CM l'arc BN égal à l'arc B'M'. Si de l'angle OAM, extérieur au triangle OAD, on retranche l'angle NAO égal à l'angle M'A'O et par suite à l'angle ADO, il reste l'angle MAN qui sera égal à l'angle AOA' ou à son égal TOT'. Donc l'angle T'C'T'', égal à l'angle TCN et par conséquent double de l'angle MAN, est aussi double de l'angle TOT' comme je voulais le démontrer. On peut donc considérer le lieu comme décrit par le point M appartenant au plan du cercle CO qui roule dans le cercle OT, de rayon double : le lieu est donc une ellipse dont le point O est le centre. Les axes de cette ellipse sont OM et une perpendiculaire à OM au point O, c'est-à-dire les bissectrices de l'angle LOL'.

Nous avons supposé qu'on menait par A la parallèle à OL' et par B la parallèle à OL : en changeant le rôle des points A et B, on obtient une seconde ellipse concentrique à la première. Le grand axe de cette ellipse coïncide en direction avec le petit axe de la première, et réciproquement. On voit aussi que l'excès du grand axe sur le petit axe est le même pour les deux ellipses. Remarquons enfin que l'on a comme cas particuliers les deux bissectrices de l'angle LOL' quand cet angle est supplémentaire de l'angle AOB, et le cercle O lui-même quand l'angle AOB est nul.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

De la question donnée en composition au concours d'admission à l'École Normale (1863);

Par M. HAAG.

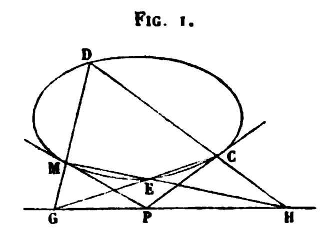
On considère les hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe donnée AB *en un point* C *et passant par un point* D. *D'un point* P *pris sur* AB *on mène des tangentes à chacune de ces hyperboles et on demande le lieu des points de contact.*

Déterminer la nature du lieu d'après la position du point D.

Théorème préliminaire. — *Si une conique variable passe par deux points fixes* D, E *et touche une droite fixe* PC *en un point* C, *le lieu des points de contact des tangentes à cette conique menées par un point* P *de la droite* PC *est une conique.*

En effet, soit M un point du lieu : considérons le qua-

Fig. 1.

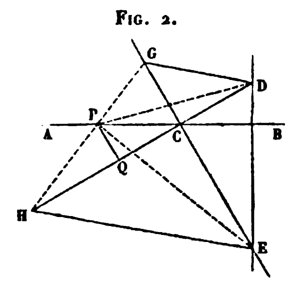


drilatère MDCE ; ce quadrilatère étant inscrit dans une conique à laquelle CP, MP sont tangentes, d'après un

théorème connu, le point P sera situé sur la droite qui joint les points d'intersection G, H des côtés opposés, et l'on pourra considérer le point M comme obtenu en menant par P une sécante arbitraire GH, joignant DG, EH et prenant le point d'intersection de ces deux dernières droites. Or les droites DG, EH décrivent évidemment des divisions homographiques, donc le point M décrit une conique passant aux points D, E. De plus, si la sécante GH coïncide avec PC, on aura le point C, qui est un troisième point du lieu ; enfin, si la sécante se rapproche de la position PD, le point M tend vers le point D, et comme à la limite la sécante DM et la droite PD coïncident, on en conclut que PD est au point D la tangente à la conique trouvée. Pour une raison analogue, PE sera la tangente au point E de cette conique.

Revenons à la question proposée. On sait que dans l'hyperbole équilatère les cordes perpendiculaires à une tangente sont vues du point de contact sous un angle droit. Donc si nous élevons au point C la perpendiculaire à CD

Fig. 2.



et que nous prenions son intersection avec la perpendiculaire à AB menée par D, le point E ainsi obtenu sera commun à toutes les hyperboles équilatères considérées. Donc, d'après le théorème précédent, le lieu demandé est une conique passant par les points C, D, E et ayant en D, E les droites PD, PE pour tangentes.

Cherchons à déterminer d'après la position du point D la nature de la conique trouvée. Cette discussion se fera aisément en cherchant les points de la courbe situés à l'infini.

Soit GH une position de la sécante mobile pour laquelle DG, EH sont parallèles. On aura alors

$$CG.CH = CD.CE,$$

c'est-à-dire que les triangles CDE, CGH seront équivalents. GH sera donc une tangente menée du point P à l'hyperbole équilatère asymptote à DH, EG et touchant DE; et le nombre des points à l'infini sur la conique que nous étudions dépendra de la position du point P par rapport à cette hyperbole.

Du point P abaissons PQ perpendiculaire sur DH, et désignons par θ l'angle PCQ.

1° Si PQ.CQ, c'est-à-dire $\overline{PC}^2 \sin\theta\cos\theta$, est plus petit que $\dfrac{CD.CE}{4}$ ou $\dfrac{CD^2}{4\tang\theta}$, le point P est extérieur à l'hyperbole; on a deux positions de GH qui donnent deux points à l'infini, la courbe est donc une hyperbole.

Dans ce cas on a

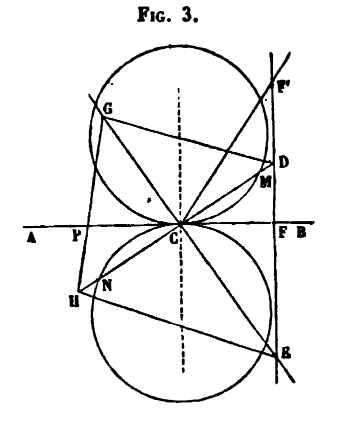
$$CD^2 > 4\overline{PC}^2 \sin^2\theta.$$

Décrivons deux cercles avec le rayon PC et tangents à AB au point C de part et d'autre de cette droite. Ces cercles intercepteront sur DH des cordes CM, CN égales à $2PC\sin\theta$. Comme CD est plus grand en valeur absolue que $2PC\sin\theta$, le point D sera en dehors de ces cercles.

2° Je suppose que $\overline{PC}^2 \sin\theta\cos\theta = \dfrac{CD^2}{4\tang\theta}$: le point P est alors sur l'hyperbole équilatère. La conique a un point à l'infini, elle est du genre parabole, le point D est sur l'un des deux cercles.

3° Je suppose enfin $PC^2 \sin\theta \cos\theta > \frac{CD^2}{4 \tang\theta}$: le point P est dans ce cas intérieur à l'hyperbole équilatère, il n'y a

Fig. 3.



plus de points à l'infini sur la conique étudiée, qui est alors une ellipse, et le point D est intérieur à l'un des deux cercles.

Pour achever cette discussion, remarquons :

Que la conique est toujours réelle, puisqu'elle passe par trois points réels et qu'elle a des tangentes réelles en deux de ces points ;

Qu'elle ne peut jamais être un cercle, puisque le cercle circonscrit au triangle CDE a en D et en E des tangentes horizontales.

Pour qu'elle se réduise à un système de deux droites, il faut évidemment :

Ou bien que le lieu se compose des deux tangentes PD, PE, et alors le point P doit être en C ;

Ou bien que ces deux tangentes soient dans le prolongement l'une de l'autre, et alors le point P doit être à l'intersection de DE et de AB en F.

Dans le premier cas, on a les droites rectangulaires

CD, CE, qui font partie de la série des hyperboles équilatères considérées.

Dans le second cas, on a la droite DE et une seconde droite CF′ conjuguée de CF par rapport à l'angle DCE. On s'explique facilement l'introduction de cette droite qui, passant au point C et au point F′ conjugué de F par rapport à DE, est la polaire du point F par rapport à toutes les hyperboles équilatères que l'on considère.

Quant à la droite DE, elle provient du système des droites rectangulaires DE, AB qui peut être considéré comme une hyperbole équilatère remplissant les conditions du problème.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 550

(voir tome XIX, page 406);

PAR M. LÉON DYRION.

ÉNONCÉ. — *L'équation d'une ellipse (coordonnées rectangulaires) étant* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *par un point pris sur la développée de l'ellipse on peut mener trois normales, dont deux ne sont pas tangentes à la développée au point considéré; la corde qui joint les points d'intersection* A *et* B *de ces deux normales est normale à l'ellipse ayant pour équation*

$$\left(\frac{c^2x}{ab^2}\right)^2+\left(\frac{c^2y}{ba^2}\right)^2=1.$$

(DESBOVES.)

Soit (x', y') un point de la développée; les pieds des

normales à l'ellipse issues de ce point seront sur l'hyperbole

$$(1) \qquad c^2xy + b^2xy' - a^2yx' = 0.$$

Si cette hyperbole est tangente à l'ellipse, deux normales se confondront en une seule. Donc, si j'identifie l'équation (1) avec la suivante

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{c} \lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \\ + (y - mx - \sqrt{a^2m^2 + b^4})(y - px - q) = 0, \end{array} \right.$$

λ, p, q étant indéterminés, l'équation

$$y = px + q$$

représentera la sécante AB.

En identifiant les équations (1) et (2) on a cinq conditions qui déterminent x', y', λ, p, q. Or les trois premières

$$\lambda a^2 + 1 = 0,$$
$$\lambda b^2 - mp = 0,$$
$$-\lambda a^2 b^2 + q\sqrt{a^2m^2 + b^4} = 0,$$

donnent

$$p = -\frac{b^2}{a^2 m},$$
$$q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},$$

et l'équation de la sécante AB devient

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x + \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},$$

que l'on peut écrire

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x - \frac{-\dfrac{b^2}{a^2m}\dfrac{a^2b^2}{c^2}}{\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{c^4} + \dfrac{b^4}{a^4m^2}\dfrac{b^2a^4}{c^4}}},$$

qui est l'équation d'une normale à l'ellipse

$$\left(\frac{c^2 x}{ab^2}\right) + \left(\frac{c^2 y}{b^2 a}\right)^2 = 1.$$

Les deux relations que nous avons négligées exprimaient x' et y' en fonction de m. De sorte que si l'on éliminait m entre ces deux équations on aurait l'équation de la développée.

On peut remarquer que la direction de AB est conjuguée de celle de la tangente, ce qui donne encore une propriété remarquable de cette ligne.

Question 669

(voir 1re série, t. II, p. 422);

PAR MM. GODART ET COURTIN,
Élèves de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' étant donnés, désignons par α_1, α_2, α_3, α_4 *les volumes des tétraèdres obtenus en joignant le point a aux points* a', b', c', d'; β_1, β_2, β_3, β_4 *les volumes des tétraèdres obtenus en joignant le point b aux points* a', b', c', d'; *etc.*

Démontrer que

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = abcd \times \overline{a'b'c'd'}^3.$$

(FAURE.)

Si on a quatre points dont les coordonnées soient $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$, $(x'''y'''z''')$, $(x^{\text{IV}}y^{\text{IV}}z^{\text{IV}})$, le volume du tétraèdre ayant ces quatre points pour sommet est, à

un facteur constant près, donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x^{\text{iv}}, & y^{\text{iv}}, & z^{\text{iv}}, & 1 \end{vmatrix}.$$

Nous ferons dans la suite abstraction de ce facteur constant qui se trouverait dans les deux membres de toutes les égalités, et qu'on pourrait supprimer.

Cela posé, considérons un des déterminants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, α_1 par exemple. Si on appelle $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$,..., les coordonnées des sommets du tétraèdre $abcd$; $(x'_1 y'_1 z'_1)$, $(x''_1 y''_1 z''_1)$,..., celles des sommets du tétraèdre $a'b'c'd'$, on a

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x''_1 & y''_1 & z''_1 & 1 \\ x'''_1 & y'''_1 & z'''_1 & 1 \\ x^{\text{iv}}_1 & y^{\text{iv}}_1 & z^{\text{iv}}_1 & 1 \end{vmatrix},$$

et si on appelle $D'_1, D''_1, D'''_1, D^{\text{iv}}_1$ les déterminants mineurs du déterminant qui exprime le volume du tétraèdre $a'b'c'd'$, quand on ordonne ce déterminant par rapport à x', y', z', 1,

$$\alpha_1 = D'_1 x' + D''_1 y' + D'''_1 z' + D^{\text{iv}}_1.$$

De même α_2 serait de la forme

$$\alpha_2 = D'_2 x' + D''_2 y' + D'''_2 z' + D^{\text{iv}}_2,$$

$D'_2, D''_2, D'''_2, D^{\text{iv}}_2$ étant des déterminants mineurs analogues aux premiers, et ainsi de suite; de sorte que le déterminant proposé peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} D'_1 x' + \ldots + D^{\text{iv}}_1, & D'_2 x' + \ldots + D^{\text{iv}}_2, & D'_3 x' + \ldots, & D'_4 x' + \ldots \\ D'_1 x'' + \ldots + D^{\text{iv}}_1, & D'_2 x'' + \ldots + D^{\text{iv}}_2, & D'_3 x'' + \ldots, & D'_4 x'' + \ldots \\ D'_1 x''' + \ldots + D^{\text{iv}}_1, & D'_2 x''' + \ldots + D^{\text{iv}}_2, & D'_3 x''' + \ldots, & D'_4 x''' + \ldots \\ D'_1 x^{\text{iv}} + \ldots + D^{\text{iv}}_1, & D'_2 x^{\text{iv}} + \ldots + D^{\text{iv}}_2, & D'_3 x^{\text{iv}} + \ldots, & D'_4 x^{\text{iv}} + \ldots \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant est égal, comme on sait, au produit

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{\text{iv}} & y^{\text{iv}} & z^{\text{iv}} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} D'_1 & D''_1 & D'''_1 & D^{\text{iv}}_1 \\ D'_2 & D''_2 & D'''_2 & D^{\text{iv}}_2 \\ D'_3 & D''_3 & D'''_3 & D^{\text{iv}}_3 \\ D'_4 & D''_4 & D'''_4 & D^{\text{iv}}_4 \end{vmatrix}.$$

Le premier est, à un facteur constant près, le volume de *abcd*. Quant au second, c'est le déterminant formé par les seize déterminants mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x''_1 & y''_1 & z''_1 & 1 \\ x'''_1 & y'''_1 & z'''_1 & 1 \\ x^{\text{iv}}_1 & y^{\text{iv}}_1 & z^{\text{iv}}_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc (*) il est égal au cube de ce déterminant qui représente le volume $a'b'c'd'$. La proposition est donc démontrée.

Note. — M. A. S., élève de M. Painvin, a envoyé une solution de la même question. Il existe un théorème analogue pour deux triangles situés dans le même plan.

Question 684

(voir page 59);

PAR M. LÉON DYRION.

Dans toute parabole, la droite qui joint les milieux des rayons de courbure correspondant aux extrémités d'une corde focale quelconque passe par le foyer et par le pôle de la corde focale. A cette propriété descriptive

(*) BALTZER, traduit par HOÜEL, p. 46.

correspond la relation métrique

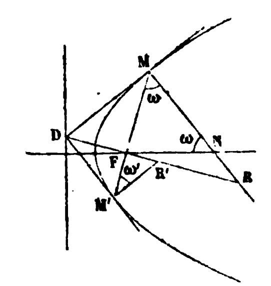
$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}},$$

R *et* R′ *étant les courbures et* $2p$ *le paramètre.* (Pigeon.)

L'expression du rayon de courbure est

$$R=\frac{N^3}{p^2}=N.\frac{N^2}{p^2}=\frac{N}{\cos^2\omega},$$

ω étant l'angle FMN = MNF, N la normale. On voit donc que l'on aura le milieu R du rayon de courbure, en élevant



en F une perpendiculaire FR sur la corde. Le point R′ s'obtient par la même construction, et comme la droite FRR′ passe au foyer et au point D, la première partie est démontrée.

Quant à la relation métrique, on a

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{p^{\frac{4}{3}}}{N^2};$$

on a donc

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}=p^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{N^2}+\frac{1}{N'^2}\right),$$

N′ étant la normale au point M′.

Mais

$$\frac{p}{N} = \cos\omega, \qquad \frac{p}{N'} = \cos\omega' = \sin\omega,$$

donc

$$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2} = \frac{1}{p^2},$$

et

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Note du rédacteur. — M. Picquet fait la remarque suivante :

Si l'on considère un rayon lumineux émané du point F et dirigé vers FM, il se réfléchira sur une parallèle à l'axe. Il résultera d'une formule très-connue relative aux caustiques

$$\frac{2}{R} = \cos\omega . \frac{1}{MF}$$

(parce que le rayon réfléchi est infini), c'est-à-dire

$$MF = \frac{R}{2}\cos\omega .$$

Donc la droite qui joint le milieu du rayon de courbure en M au foyer est perpendiculaire à la corde focale. Il en serait de même pour le point M'. Donc la droite qui joint le milieu des rayons de courbure est perpendiculaire à la corde focale, au foyer, et par suite elle passe par le pôle.

MM. Hanon et Willot, élèves de l'École Centrale, ainsi que MM. Mirza-Nizam et Marini, licencié ès sciences, donnent une démonstration géométrique très-simple, fondée sur la construction du rayon de courbure des coniques.

La même question a été traitée par MM. Courtin et

Godart, Lacauchie, Grassat et Tivollier, Nouette et Debatisse, Douradou, Graindorge.

M. Marini donne en outre une solution analytique, et se pose ce problème plus général : *Déterminer la courbe dans laquelle le segment du rayon de courbure intercepté entre le rayon vecteur et une droite partant du pôle et faisant avec lui un angle constant α soit proportionnel au rayon de courbure.* Ce problème conduit à une équation différentielle du deuxième ordre qui se ramène au premier, mais qui paraît ne pouvoir être intégrée complétement que dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, et pour quelques valeurs simples du rapport donné, on trouve la parabole, la spirale logarithmique, l'hyperbole équilatère. M. Marini arrive par cette dernière courbe à la propriété suivante : *Dans l'hyperbole équilatère, la perpendiculaire à un diamètre menée par le centre intercepte sur la normale menée à l'extrémité du diamètre, sur la partie prolongée en dehors de la courbe, une longueur égale au rayon de courbure.*

Question 685

(voir page 60);

PAR M. LÉON DYRION.

Une courbe quelconque A *est située dans le plan d'une parabole. On lui mène une tangente mobile qui coupe la parabole en deux points* P et P'. *On projette les centres de courbure relatifs à ces points respectivement sur les rayons focaux qui y aboutissent.*

La droite qui joint ces projections p, p' enveloppe une courbe symétrique de A *par rapport au foyer.*

Examiner le cas particulier où la courbe A *se réduit à un point, et celui où elle s'éloigne à l'infini.* (PIGEON.)

Dans la question précédente, le foyer est la projection sur le rayon vecteur du milieu du rayon de courbure; l'extrémité du rayon se projettera donc suivant un point symétrique de P par rapport au foyer. La projection de l'extrémité de l'autre rayon sera symétrique de P' par rapport au foyer.

On voit donc que la ligne pp' qui joint les projections des centres de courbure est la symétrique de la droite PP' par rapport au foyer. Donc, si PP' est tangente à une courbe A la ligne passant par les projections des centres de courbure sera tangente à une courbe symétrique de A.

Si A est un point, toutes les droites symétriques de PP' passeront par le symétrique de A.

Si A va à l'infini, toutes les droites seront parallèles.

Note. — Solution géométrique, fondée sur la question 684, par MM. H. Picquet, Mirza-Nizam, Hanon et Williot, Tivollier et M. Lhopital, élèves du lycée de Lyon, Nouette et Debatisse, Courtin et Godart. Solution analytique de MM. Tivollier et Grassat.

Questions 686 *et* 687

(voir p. 60).

686. *Si dans une ellipse deux cordes supplémentaires variables passent par les extrémités d'un diamètre donné et que, par un point fixe pris sur l'ellipse, on mène des parallèles à ces cordes, la diagonale libre du parallélogramme qu'elles forment avec elles passe par un point fixe. La connaissance de ce point permet de trouver les points et les tangentes en ces points d'une ellipse donnée par son centre et par trois points.*

(Pigeon.)

687. *Lorsque le sommet d'un angle dont les côtés restent parallèles à eux-mêmes décrit une section co-*

nique, la corde sous-tendue par l'angle enveloppe une seconde conique asymptotique (ou semblable) à la première. (PIGEON.)

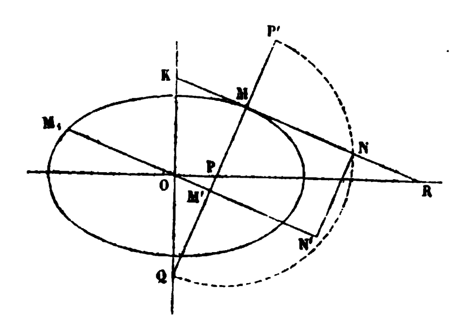
Nous avons reçu un grand nombre de solutions (*) de ces deux questions, et la plupart de leurs auteurs font remarquer que ces théorèmes sont évidents dans le cercle et que leur extension aux sections coniques s'obtient soit par des projections coniques ou cylindriques, soit par la transformation homographique; c'est probablement par l'un de ces moyens que M. Pigeon y est parvenu. Cette remarque dispense d'entrer dans de plus grands détails.

Question 688

(voir p. 61);

PAR M. MIRZA-NIZAM.

Par un point quelconque pris sur une ellipse, on mène la normale qui rencontre les axes en P *et* Q. *Sur*



le prolongement de la normale on prend MP' = MP;

(*) Croullebois, élève de l'Institution Barbet; Nombel, Alcan, élèves de Sainte-Barbe; Morel, Leclère et Daguenet, Lefort, G. Elie, Graindorge, Bailly et presque tous les élèves nommés à propos des questions précédentes.

sur P'Q *comme diamètre on décrit un cercle qui rencontre au point* N *la tangente conduite par* M. *Par le point* N *on mène une parallèle à la normale, et par le centre* O *une parallèle à la tangente.*

Le rectangle MNM'N' *ainsi obtenu est constant et équivaut au rectangle construit sur les demi-axes.*

On a dans le cercle

$$\overline{MN}^2 = MP.MQ;$$

les triangles semblables RMP et KMQ donnent

$$MP.MQ = MK.MR = \overline{OM_1}^2,$$

OM_1 étant le diamètre parallèle à la tangente MK; on a donc

$$MN = OM_1.$$

Je joins OM et j'ai

$$MM' = OM.\sin \widehat{MOM_1}.$$

On a donc

$$MN.MM' = OM_1.OM.\sin\widehat{MOM_1} = ab,$$

a et b étant les demi-axes. Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Ce théorème permet de trouver la limite du point Q ou du point P quand la normale se confond avec l'un ou l'autre axe, et par suite permet de trouver le centre de courbure aux sommets de l'ellipse.

Note. — MM. Bailly, aspirant répétiteur au lycée d'Orléans, Leclère, élève du lycée de Caen (classe de M. Toussaint), font remarquer qu'il existe un théorème analogue pour l'hyperbole. Autres solutions de MM. Dyrion, Lacauchie, élèves du lycée de Strasbourg; Alexandre Barrère, Tivollier et Grassat, Michel Lhopital, du lycée de Lyon; A. du Mesnil, de l'école de Sorrèze (classe de M. Dumont); Smith junior, du lycée Louis-le-Grand; Leparquois, du lycée de Caen; Massing, Douradou, Picquet, Courtin et Godart, de Sainte-Barbe; Puthoste, du Prytanée impérial; Morel, Lhéritier, du lycée de Douai; A. L. et E. L., de l'École Sainte-Geneviève.

THÉORÈMES;

PAR M. H. FAURE.

I. Le lieu du sommet d'un angle θ circonscrit à deux courbes de classes n et n' est une courbe de l'ordre $4nn'$. Si ces courbes ont l'une r branches, l'autre r' branches paraboliques, et de plus m foyers en commun, le degré est diminué de $2(nr' + n'r + 2m)$.

Si l'angle est droit, le lieu est du degré

$$2nn' - nr' - n'r - 2m.$$

II. Le lieu du pied des obliques menées d'un point fixe et sous l'angle θ aux tangentes d'une courbe de la classe n est une courbe du degré $2n - r$. Si le point fixe est un foyer de la courbe, le degré du lieu est $2(n-1) - r$.

III. Le lieu du point d'où l'on voit sous un même angle deux courbes de classes n et n' est une courbe du degré $\frac{3}{2} nn'(n-1)(n'-1)$.

IV. Le lieu d'un point tel, que menant de ce point une tangente à une courbe de la classe n' et une tangente à une courbe de la classe n'', l'angle de ces tangentes soit le même que l'angle formé par deux tangentes menées du même point à une courbe de la classe n, est une courbe du degré $3nn'n''(n-1)$.

Grenoble, 9 juillet 1864.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XXIV.

Chasles. — *Système des coniques qui coupent des coniques données sous des angles donnés ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions déterminées.* In-4 de 8 pages. (Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 mars 1864.)

Continuation du Mémoire analysé p. 191. M. Chasles aborde des problèmes de plus en plus difficiles et qui présentent un nombre prodigieux de solutions. Le nombre des coniques coupant quatre coniques données sous des angles donnés et telles, que deux de leurs diamètres conjugués passent par deux points donnés, est 33755904 ! M. Chasles a fait connaître ses belles méthodes dans les séances du 27 juin et du 4 juillet. Nous y reviendrons.

XXV.

Pasteur, membre de l'Institut, directeur des études scientifiques à l'École Normale. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.* Tome I[er], 1[re] livraison; in-4 de VIII-80 pages et 1 planche gravée. Paris, 1864; Gauthier-Villars. Prix : 30 francs pour six livraisons qui seront publiées tous les deux mois.

Nous accueillons avec joie cette publication qui contribuera à l'éclat d'un établissement renommé. Les études scientifiques ont accompli à l'École Normale, depuis vingt-cinq ans, des progrès considérables, grâce à la libéralité de l'État et surtout à la grande valeur des hommes qui y prennent part à l'enseignement

des sciences. C'est donc une heureuse idée d'avoir songé à publier tous les deux mois les meilleures productions des anciens élèves et des maîtres de l'École.

Le premier fascicule contient : *Recherches sur le pouvoir rotatoire des liquides actifs et de leurs vapeurs;* par M. Désiré Gernez, agrégé-préparateur à l'École Normale (p. 1 à 38). — *Sur les principales inégalités du mouvement de la Lune;* par M. V. Puiseux, maître de conférences à l'École Normale.

M. Gernez continue et varie l'expérience unique de Biot, par laquelle l'illustre physicien a constaté le pouvoir rotatoire des vapeurs. De très-nombreuses observations, faites sur divers liquides et sur leurs vapeurs, conduisent l'auteur à cette conclusion : « Si l'on admet que le pouvoir rotatoire des substances actives dépend de leur structure moléculaire, on peut dire que les molécules liquides ne subissent aucune modification dans leur forme, quand elles passent à l'état de vapeur, puisqu'elles agissent dans le même sens et avec la même intensité sur les rayons de lumière polarisée. »

M. Puiseux s'est proposé de montrer comment, sans entreprendre les calculs compliqués qu'exige une théorie complète de la Lune, on peut se rendre compte assez simplement des principales circonstances du mouvement de cet astre autour de la Terre et en déterminer approximativement les inégalités les plus importantes. « Le but de cet article, ajoute le savant et consciencieux auteur, serait atteint s'il engageait quelques lecteurs à l'étude plus approfondie d'une théorie qui effraye ordinairement par son étendue et sur laquelle, malgré des progrès récents et considérables, la science n'a peut-être pas encore dit son dernier mot. »

XXVI.

Marsano (J.-B). — Considerazioni... *Considérations sur le triangle rectiligne*. In-8 de 72 pages et 2 planches. Gênes, 1863. Librairie de Louis Beuf.

Cette monographie, adressée spécialement aux jeunes gens qui étudient la Géométrie, comprend tous les travaux faits de-

puis Euler sur les bissectrices, les hauteurs, les médianes d'un triangle, le cercle des neuf points, etc.

XXVII.

LE COINTE, professeur à l'école préparatoire Sainte-Marie, à Toulouse. — *Notions élémentaires sur les courbes usuelles*. In-8 de VIII-92 pages avec de nombreuses figures dans le texte. Paris, 1864. Librairie de Gauthier-Villars. Prix : 2 francs.

Ouvrage destiné à la préparation au Baccalauréat ès Sciences et à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr.

XXVIII.

CASTELNAU (L.), professeur au collége Stanislas. — *Cours préparatoire aux examens de conducteur et piqueur des Ponts et Chaussées et autres services publics* (*programme développé du cours*). 2 feuilles in-8. Paris, 1864.

L'enseignement qu'on est convenu d'appeler *professionnel* ne peut différer de l'enseignement purement scientifique que par le mode des applications. M. Castelnau l'a bien compris. Les parties purement spéculatives de la science ont été écartées de l'ouvrage, mais l'auteur a été continuellement préoccupé de placer en regard des théories les plus simples leurs plus fécondes applications. M. Castelnau, et nous lui en savons gré, n'a fait aucune concession à cet esprit de vulgarisation mal entendu qui n'a d'autres résultats que la propagation d'idées fausses et de connaissances tronquées. Les élèves qui posséderont les matières de son programme peuvent être assurés qu'ils auront des notions sérieuses et justes sur l'Arithmétique, la Géométrie élémentaire, l'Algèbre, la Géométrie descriptive et les éléments de Mécanique. Une large place a été réservée au levé des plans, au nivellement et à la connaissance des travaux.

ÉDOUARD MERLIEUX.

XXIX.

Moret, professeur de Mathématiques à Fribourg. — *Le binôme de Newton, interprété et démontré pour un exposant d'une manière à la fois rigoureuse et élémentaire au moyen d'une nouvelle théorie des séries infinies.* In-12 de VI-42 pages; 1864.

J'ai lu, je ne sais où, qu'un certain personnage était mort de tout le mal qu'il s'était donné pour vivre sans rien faire. On ressemble à ce personnage, quand on cherche à démontrer par l'Arithmétique ou par l'Algèbre ce qui est du ressort de l'Algèbre ou du Calcul différentiel. C'est faire de grands efforts pour éviter un petit travail. Mais, dira-t-on, je m'adresse à des élèves qui n'ont pas été plus loin que l'Algèbre. A cela je réponds : Ou vos élèves ne se soucient pas de savoir le binôme de Newton, alors ils ne liront pas votre brochure; ou bien ils veulent acquérir cette connaissance et, dans ce cas, ils auront plus tôt fait d'apprendre le Calcul différentiel, qui n'est qu'une simplification de l'Algèbre.

Voilà pour la question de forme. Au fond, la brochure contient une démonstration, sinon élémentaire, du moins rigoureuse de la formule de Newton. C'est l'œuvre d'un homme de mérite qui pourrait mieux employer son temps.

XXX.

Journal de l'École impériale Polytechnique, XLe cahier, t. XXIII. In-4 de IV-230 pages et 8 planches. Paris, 1864. Gauthier-Villars. Prix : 8 francs.

Ce volume contient : Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace; par M. *de la Gournerie*. — Mémoire (posthume) sur la théorie des imaginaires, sur l'équilibre des températures et l'équilibre d'élasticité; par M. *P.-Alph.*

Laurent. — Recherches géométriques sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes; par M. *Mannheim*.

Steiner a démontré que *si un arc de courbe roule sur une droite, un point quelconque du plan de cette courbe, entraîné dans le mouvement, décrit un arc égal à l'arc de la podaire obtenu en projetant le point sur les tangentes à la courbe.*

M. Mannheim examine ce qui arriverait si le point considéré avait un certain mouvement par rapport à la courbe roulante, et il arrive à plusieurs théorèmes curieux sur les arcs de courbes planes ou sphériques. C'est une utile addition aux nombreux théorèmes qui établissent des relations entre des arcs de courbes différentes. Les développées, les reptoires, les courbes parallèles, la réduction des rectifications aux quadratures, le développement d'une surface sur une autre, etc., fournissent des relations de ce genre.

XXXI.

KUPFER (C.), de Trèves. — *Considérations géométriques destinéees à faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques* (*Journal* de *Crelle* continué par *Borchardt*, t. LXIII, p. 40 à 58).

Travail intéressant, mais qui n'a pas la nouveauté que l'auteur lui suppose. L'un des principaux théorèmes a été trouvé, il y a une vingtaine d'années, par M. Graves, et presque en même temps par M. Chasles. Les autres sont de M. Chasles (*voir* les *Comptes rendus*, t. XVII, 1843, Propriétés générales des arcs de sections coniques dont la différence est rectifiable, p. 838; t. XIX, Construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques, p. 1239).

XXXII.

MARTIN (P.), professeur au collége de Toul. — *Théorie et pratique des calculs d'approximation numérique.* In-12 de 42 pages; 1864. Gauthier-Villars.

CALCUL APPROCHÉ DE r DANS LA FORMULE DES INTÉRÊTS COMPOSÉS;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur au lycée Saint-Louis.

Soit la formule

$$A = a(1+r)^n(1+rf),$$

où n est un nombre entier et f un facteur moindre que 1.

Si on prend

$$\begin{aligned}
A &= a(1+r_1)^n,\\
A &= a(1+r_2)^n(1+r_1 f),\\
A &= a(1+r_3)^n(1+r_2 f),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A &= a(1+r_k)^n(1+r_{k-1} f),\\
A &= a(1+r_{k+1})^n(1+r_k f),
\end{aligned}$$

on reconnaît immédiatement que $r_1, r_3, r_5, \ldots$, forment une suite décroissante, tandis que $r_2, r_4, r_6, \ldots$, forment une suite croissante.

Nous nous proposons d'établir que r en est la limite commune, et de fixer le degré d'approximation à quelque point qu'on s'arrête.

Nous avons d'abord

$$(1+r_k)^n(1+r_{k-1}f) = (1+r_{k+1})^n(1+r_k f),$$

d'où

$$\frac{(1+r_k)^n}{(1+r_{k+1})^n} = \frac{1+r_k f}{1+r_{k-1} f},$$

ce qui donne

$$\frac{(1+r_k)^n - (1+r_{k+1})^n}{(1+r_{k+1})^n} = \frac{(r_k - r_{k-1})f}{1+r_{k-1} f},$$

puis

$$\frac{n(r_k-r_{k+1})+\frac{n(n-1)}{1.2}(r_k^2-r_{k+1}^2)+\ldots}{(1+r_{k+1})^n}=\frac{(r_k-r_{k-1})f}{1+r_{k-1}f},$$

d'où

$$r_k-r_{k+1}=\frac{(r_k-r_{k-1})}{1+r_{k-1}f}$$

$$\times\frac{(1+r_{k+1})^n f}{n+\frac{n(n-1)}{1.2}(r_k+r_{k+1})+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r_k^2+r_k r_{k+1}+r_{k+1}^2)+\ldots}$$

$$=(r_k-r_{k-1})\frac{f}{1+r_{k-1}f}\left[\frac{1}{n+\frac{n(n-1)}{1.2}(r_k+r_{k+1})+\ldots}\right.$$

$$\left.+r_{k+1}\frac{n+\frac{n(n-1}{1.2}r_{k+1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r_{k+1}^2+\ldots}{n+\frac{n(n-1)}{1.2}(r_k+r_{k+1})+\ldots}\right].$$

Dans la parenthèse, le facteur de r_{k+1} est moindre que 1. Donc

$$\pm(r_k-r_{k+1})<\pm(r_k-r_{k-1})\frac{f}{1+r_{k-1}f}\left(\frac{1}{n}+r_{k+1}\right).$$

Posons

$$\alpha=\frac{f}{1+r_2 f}\left(\frac{1}{n}+r_1\right).$$

Comme nous avons $r_1>r_m$ et $r_2<r_m$, il s'ensuit

$$\alpha>\frac{f}{1+r_{k-1}f}\left(\frac{1}{n}+r_{k+1}\right);$$

donc

$$\pm(r_k-r_{k+1})<\pm(r_k-r_{k-1})\alpha,$$

relation générale qui donne

$$r_3 - r_2 < (r_1 - r_2)\alpha,$$
$$r_3 - r_4 < (r_3 - r_2)\alpha < (r_1 - r_2)\alpha^2,$$
$$r_5 - r_4 < (r_3 - r_4)\alpha < (r_1 - r_2)\alpha^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm(r_k - r_{k+1}) < \pm(r_k - r_{k-1})\alpha < (r_1 - r_2)\alpha^{k-1};$$

mais

$$(1 + r_1)^n = (1 + r_2)^n(1 + r_1 f),$$

d'où

$$\frac{(1 + r_1)^n}{(1 + r_2)^n} = 1 + r_1 f,$$

$$\frac{(1 + r_1)^n - (1 + r_2)^n}{(1 + r_2)^n} = r_1 f;$$

donc

$$\frac{n(r_1 - r_2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_1^2 - r_2^2) + \ldots}{(1 + r_2)^n} = r_1 f;$$

d'où

$$r_1 - r_2 = \frac{(1 + r_2)^n r_1 f}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_1 + r_2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \ldots}$$

$$= r_1 f \left[\frac{1}{n + \ldots} \right.$$

$$\left. + r_2 \frac{n + \frac{n(n-1)}{1.2} r_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} r_2^2 + \ldots}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_1 + r_2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \ldots} \right]$$

$$< r_1 f\left(\frac{1}{n} + r_2\right) < r_1 f\left(\frac{1}{n} + r_1\right).$$

En conséquence,

$$\pm(r_k - r_{k+1}) < r_1 f\left(\frac{1}{n} + r_1\right)\alpha^{k-1},$$

ou

$$\pm(r_k - r_{k+1}) < r_1 f \left(\frac{f}{1 + r_2 f}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{n} + r_1\right)^k.$$

Telle est la formule que nous avions en vue. Elle établit que r est la limite commune des deux suites

$$r_1, r_3, r_5, \ldots,$$
$$r_2, r_4, r_6, \ldots,$$

si l'on a, comme d'ordinaire,

$$\frac{1}{n} + r_1 < 1,$$

ou même à la seule condition d'avoir

$$\frac{f}{1 + r_2 f}\left(\frac{1}{n} + r_1\right) < 1,$$

et elle fixera le degré d'approximation au point où on voudra s'arrêter.

Note du rédacteur. — Un calcul de valeurs approchées, qui ne tient aucun compte du degré de l'approximation obtenue, est un véritable non-sens ; autant vaudrait-il prendre le premier nombre venu comme valeur approchée de celle que l'on cherche. Je considère donc l'article de M. Lemonnier comme un complément indispensable à la solution que l'on donne ordinairement de l'une des questions sur les intérêts composés.

Toute méthode d'approximation doit satisfaire à deux conditions essentielles ; il faut d'abord qu'elle fasse connaître le degré de l'approximation de chacune des valeurs qu'elle détermine, et, en second lieu, il faut qu'elle puisse conduire à une valeur aussi approchée de l'inconnue qu'on voudra.

Ces conditions sont-elles, ou non, remplies par la mé-

thode qui donne les valeurs approchées r_1, r_2, r_3, etc., de l'inconnue r dans l'équation

$$A = a(1+r)^n(1+rf)?$$

Il résulte des calculs de M. Lemonnier que la méthode est applicable, si les données A, a, n, f satisfont elles-mêmes à l'inégalité

$$\frac{f}{1+r_2 f}\left(\frac{1}{n}+r_1\right) < 1,$$

où r_1, r_2 représentent les racines positives des équations

$$A = a(1+r_1)^n, \quad A = a(1+r_2)^n(1+r_1 f).$$

En indiquant ici quelques modifications qu'on peut apporter dans ces calculs, mon objet n'est pas de parvenir à des résultats qui soient préférables à ceux auxquels ils ont conduit, mais seulement d'éviter l'emploi de la formule du binôme, dont la connaissance n'est pas exigée des candidats aux Écoles Navale et Militaire.

J'admettrai que le nombre entier n surpasse l'unité, car, s'il en était autrement, la valeur de r se déterminerait en résolvant une équation du second degré. On a, de plus, par hypothèse, $f < 1$.

Les nombres $r_1, r_3, r_5, \ldots$, sont plus grands que r, et vont en diminuant; les nombres $r_2, r_4, r_6, \ldots$, sont moindres que r, et vont en augmentant; donc, les uns et les autres s'approchent de plus en plus de r. S'en rapprocheront-ils autant qu'on voudra? C'est le point à éclaircir.

Je désigne par r_{k-1}, r_k, r_{k+1}, trois des valeurs approchées successives, et je suppose que le nombre k est pair.

Les relations

$$A = a(1+r_k)^n(1+f r_{k-1}),$$
$$A = a(1+r_{k+1})^n(1+f r_k),$$

donnent

$$(1+r_{k+1})^n(1+fr_k)=(1+r_k)^n(1+fr_{k-1}),$$

ou

$$(1+r_{k+1})^n+(1+r_{k+1})^n fr_k=(1+r_k)^n+(1+r_k)^n fr_{k-1}.$$

De là

$$(1+r_{k+1})^n-(1+r_k)^n=(1+r_k)^n fr_{k-1}-(1+r_{k+1})^n fr_k,$$

égalité qui revient à

$$\begin{gathered}(1+r_{k+1})^n-(1+r_k)^n\\ =(1+r_k)^n f(r_{k-1}-r_k)-fr_k[(1+r_{k+1})^n-(1+r_k)^n],\end{gathered}$$

et par suite on a

$$[(1+r_{k+1})^n-(1+r_k)^n](1+fr_k)=(1+r_k)^n f(r_{k-1}-r_k);$$

ou bien encore

$$\begin{gathered}(r_{k+1}-r_k)[(1+r_{k+1})^{n-1}+(1+r_{k+1})^{n-2}(1+r_k)+\ldots\\ +(1+r_k)^{n-1}](1+fr_k)=(1+r_k)^n f(r_{k-1}-r_k).\end{gathered}$$

Le nombre r_{k+1} étant plus grand que r_k, le facteur

$$[(1+r_{k+1})^{n-1}+(1+r_{k+1})^{n-2}(1+r_k)+\ldots+(1+r_k)^{n-1}]$$

est de même plus grand que $n(1+r_k)^{n-1}$. Par conséquent, de la dernière égalité obtenue on déduit successivement les inégalités :

$$n(r_{k+1}-r_k).(1+r_k)^{n-1}(1+fr_k)<(1+r_k)^n f.(r_{k-1}-r_k);$$

$$(r_{k+1}-r_k)<\frac{(1+r_k)f}{1+fr_k}.\ \frac{(r_{k-1}-r_k)}{n};$$

$$(r_{k+1}-r_k)<\frac{r_{k-1}-r_k}{n}.$$

On a donc, en substituant à k les nombres 2, 4, etc.,

$$r_3-r_2<\frac{r_1-r_2}{n},$$

$$r_5-r_4<\frac{r_3-r_4}{n}<\frac{r_3-r_2}{n};$$

d'où

$$r_5 - r_4 < \frac{r_1 - r_2}{n^2}.$$

De même,

$$r_7 - r_6 < \frac{r_5 - r_6}{n} < \frac{r_5 - r_4}{n};$$

à plus forte raison

$$r_7 - r_6 < \frac{r_1 - r_2}{n^3};$$

et, généralement,

$$r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{r_1 - r_2}{n^k},$$

inégalité qui prouve que la différence $r_{2k+1} - r_{2k}$ deviendra moindre que tout nombre donné.

Il est clair qu'on a

$$r_{2k+1} - r < r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{r_1 - r_2}{n^k}$$

et

$$r - r_{2k} < r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{r_1 - r_2}{n^k},$$

c'est-à-dire que la méthode conduit à des valeurs aussi approchées qu'on voudra de la valeur exacte de l'inconnue r.

On peut exprimer la limite des erreurs $r_{2k+1} - r$, $r - r_{2k}$, en fonction des données A, a, n, f, et du nombre k qui détermine le rang de la valeur approchée; car les égalités

$$\mathrm{A} = a(1 + r_1)^n, \quad \mathrm{A} = a(1 + r_2)^n(1 + fr_1)$$

donnent

$$(1 + r_1)^n - (1 + r_2)^n = (1 + r_2)^n fr_1,$$

ou

$$(r_1 - r_2)[(1 + r_1)^{n-1} + (1 + r_1)^{n-2}(1 + r_2) + \ldots + (1 + r_2)^{n-1}]$$
$$= (1 + r_2)^n fr_1,$$

et, comme on a

$$[(1+r_1)^{n-1} + (1+r_1)^{n-2}(1+r_2) + \ldots + (1+r_2)^{n-1}] > n(1+r_2)^{n-1},$$

il en résulte

$$r_1 - r_2 < \frac{(1+r_2)fr_1}{n} < \frac{(1+r_1)fr_1}{n}.$$

Mais

$$(1+r_1) = \sqrt[n]{\frac{A}{a}},$$

et

$$r_1 = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1;$$

substituant à $1+r_1$, r_1, leurs valeurs, l'inégalité

$$r_1 - r_2 < \frac{(1+r_1)fr_1}{n}$$

devient

$$r_1 - r_2 < \frac{f\sqrt[n]{\frac{A}{a}}\left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1\right)}{n}.$$

D'où

$$r_{2k+1} - r < \frac{f\sqrt[n]{\frac{A}{a}}\left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} + 1\right)}{n^{k+1}},$$

$$r - r_{2k} < \frac{f\sqrt[n]{\frac{A}{a}}\left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1\right)}{n^{k+1}}.$$

En terminant, remarquons qu'il n'est pas démontré qu'une valeur r_k donnée par cette méthode approche plus de l'inconnue r que la valeur précédente r_{k-1}.

Lorsque le nombre k est pair, on trouve, au moyen d'un calcul absolument semblable à celui que nous avons fait,

$$r - r_k < \frac{r_{k-1} - r}{n},$$

et, par conséquent, la valeur r_k de rang pair est plus ap-

prochée que la précédente r_{k-1}. Mais si k est impair, le même calcul conduit à l'égalité

$$(r_k - r)[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2}(1+r_k) + \ldots + (1+r_k)^{n-1}](1+fr_{k-1})$$
$$= (1+r)^n f(r - r_{k-1}),$$

qui ne prouve pas que $(r_k - r)$ soit moindre que $(r - r_{k-1})$. Cette égalité montre qu'on a

$$n(r_k - r)(1+r)^{n-1}(1+fr_{k-1}) < (1+r)^n f(r - r_{k-1});$$

d'où

$$r_k - r < (r - r_{k-1}) \frac{(1+r)f}{n(1+fr_{k-1})},$$

et *à fortiori*

$$r_k - r < (r - r_{k-1}) \frac{(1+r_1)f}{n(1+fr_2)}.$$

Par conséquent, il suffit qu'on ait

$$\frac{(1+r_1)f}{n(1+fr_2)} < 1,$$

pour que la valeur r_k, de rang impair, soit plus approchée de r que celle qui la précède. Cette condition sera évidemment remplie si r_1 est moindre que l'unité.

G.

NOTE SUR UN CERCLE;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus College, Oxford.

Représentons par l, m, n *les milieux des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC; *par* S_a, S_b, S_c *et* S_l, S_m, S_n *les cercles décrits sur ces côtés et sur les médianes* Al, Bm, Cn *comme diamètres; et enfin, par* E *l'ellipse*

qui touche les côtés en leurs milieux l, m, n : démontrer que le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse E, *passe par les points d'intersection des circonférences suivantes :*

$$1^{\circ}\ S_a, S_l, \quad 2^{\circ}\ S_b, S_m; \quad 3^{\circ}\ S_c, S_n; \quad 4^{\circ}\ S, S',$$

où S, S′ représentent le cercle circonscrit et le cercle conjugué au triangle (voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, p. 339).

Si l'on prend le triangle ABC pour triangle de référence, les cercles indiqués ci-dessus seront représentés par les équations :

$$(1)\quad \begin{cases} S_a = \alpha^2\cos A - \beta\gamma - \gamma\alpha\cos C - \alpha\beta\cos B = 0, \\ S_b = \beta^2\cos B - \beta\gamma\cos C - \gamma\alpha - \alpha\beta\cos A = 0, \\ S_c = \gamma^2\cos C - \beta\gamma\cos B - \gamma\alpha\cos A - \alpha\beta = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} S_l = b\beta^2\cos B + c\gamma^2\cos C - a\beta\gamma - (b + c\cos A)\gamma\alpha \\ \qquad\qquad - (b\cos A + C)\alpha\beta = 0, \\ S_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\ (^*), \end{cases}$$

et, si l'on désigne par S_d le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse,

$$(3)\quad \begin{cases} E = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2ca\gamma\alpha \\ \qquad\qquad - 2ab\alpha\beta = 0, \end{cases}$$

(*) En coordonnées *trilinéaires*, l'équation générale de la circonférence est

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)(\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C)$$
$$+ k(\beta\gamma\sin A + \gamma\alpha\sin B + \alpha\beta\sin C) = 0;$$

(*Traité des sections coniques* de M. G. Salmon; 4e éd., p. 119.)

Les coefficients variables sont l, m, n, k; il suffit de connaître leurs rapports, pour que l'équation soit déterminée. Ces rapports s'obtiennent facilement quand on a les coordonnées de trois points de la courbe. Par exemple on trouve, sans la moindre difficulté, l'équation de la circonfé-

on trouve que

$$(4) \quad \begin{cases} S_d = a\alpha^2\cos A + b\beta^2\cos B + c\gamma^2\cos C \\ \qquad - 2(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0, \end{cases}$$

d'où on déduit les relations suivantes :

$$S_l = bS_b + cS_c,$$
$$S_m = cS_c + aS_a,$$
$$S_n = aS_a + bS_b,$$
$$S_d = aS_a + bS_b + cS_c,$$

et, par conséquent,

$$aS_a + S_l = S_d = bS_b + S_m = cS_c + S_n.$$

---

rence S_a décrite sur BC comme diamètre, en remarquant que cette courbe passe par les points H', H'', pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B, C sur les côtés opposés.

Dans certains cas, on peut déterminer directement l'équation de la circonférence considérée, au moyen de cette proposition que, *si d'un point quelconque d'une circonférence, on mène des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux des côtés opposés est égal au produit des deux autres perpendiculaires.*

Ainsi, en nommant p la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence S_a sur H'H'', on aura $p\alpha = 6\gamma$. Mais l'équation de la droite H'H'' est

$$\alpha\cos A - \gamma\cos C - 6\cos B = 0;$$

et, d'après la formule qui donne la distance d'un point à une droite, la valeur de p est

$$\alpha\cos A - \gamma\cos C - 6\cos B;$$

donc la circonférence S_a a pour équation

$$(\alpha\cos A - \gamma\cos C - 6\cos B)\alpha = 6\gamma$$

ou

$$\alpha^2\cos A - 6\gamma - \alpha\gamma\cos C - \alpha 6\cos B = 0.$$

Quant à l'équation de S_d, lieu géométrique du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse E qui touche en leurs milieux les trois côtés du triangle ABC, elle peut être déduite de l'équation qui représente, en coordonnées trilinéaires, le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique quelconque (p. 338 de l'ouvrage déjà cité). G.

La circonférence S_d passe donc par les six points d'intersection des circonférences S_a, S_l; S_b, S_m; S_c, S_n. Il est évident aussi, d'après l'équation (4), que S_d passe par les deux points communs aux circonférences S, S'. Le théorème est ainsi démontré.

Les axes radicaux des cercles S_a, S_l; S_b, S_m et S_c, S_n, ont pour équations :

(5) $$-2\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

(6) $$\alpha\cos A - 2\beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

(7) $$\alpha\cos A + \beta\cos B - 2\gamma\cos C = 0.$$

Il suit de là que ces lignes passent toutes trois par le point de concours des hauteurs du triangle.

D'ailleurs, on a, d'après les relations ci-dessus,

$$2S_d = S_l + S_m + S_n,$$

d'où l'on déduit que les quatre points d'intersection des deux couples de circonférences S_d, S_l; S_m, S_n sont situés sur la circonférence $S_m + S_n$, et que les intersections de S_d, S_m; S_n, S_l; S_d, S_n; S_l, S_m sont situées sur les circonférences $S_n + S_l$ et $S_l + S_m$ respectivement.

Les cordes communes aux cercles S, S_l; S, S_m; S, S_n sont données par les équations

(8) $$\beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

(9) $$\gamma\cos C + \alpha\cos A = 0,$$

(10) $$\alpha\cos A + \beta\cos B = 0.$$

Donc, les lignes (5), (8); (6), (9); (7), (10) coupent les côtés BC, CA, AB respectivement, en trois points qui sont situés sur la ligne

$$\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

c'est-à-dire sur l'axe radical des cercles S, S'.

Les axes radicaux des cercles S_m, S_n; S_n, S_l; et S_l, S_m ont pour équations :

$$\beta \cos B - \gamma \cos C = 0,$$
$$\gamma \cos C - \alpha \cos A = 0,$$
$$\alpha \cos A - \beta \cos B = 0,$$

qui représentent les hauteurs du triangle de référence.

Ces hauteurs sont, évidemment, les cordes communes des cercles

$$S_b, S_c; \quad S_c, S_a; \quad S_a, S_b.$$

Le cercle S_d, lieu dont il s'agit, est concentrique, comme on le sait, à l'ellipse E. Son centre coïncide donc avec le point de rencontre des médianes du triangle.

La valeur que je trouve pour son rayon est

$$\frac{2}{3} R \sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C},$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC (*).

(*) En nommant a' le demi-diamètre de l'ellipse E, parallèle à la tangente a, et b' le demi-diamètre conjugué conduit au milieu L de BC, on a

$$a'^2 = \frac{a^2}{12} \quad \text{et} \quad b'^2 = \frac{b^2 + c^2}{18} - \frac{a^2}{36},$$

d'où

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18} = \frac{2R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{9}.$$

Il s'ensuit

$$a'^2 + b'^2 = \frac{4R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)}{9},$$
$$\sqrt{a'^2 + b'^2} = \frac{2R}{3} \sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C},$$

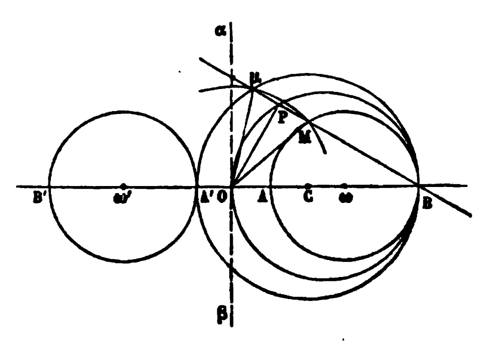
ce qui est la valeur du rayon du cercle S_d. G.

SECTION DU TORE PAR UN PLAN BITANGENT;

PAR M. GODART,
Professeur à Saint-Barbe.

THÉORÈME. — *La section d'un tore par un plan bitangent est l'ensemble de deux circonférences.*

Soient ω le centre et AB le diamètre du cercle générateur d'un tore dont l'axe est la ligne $\alpha O \beta$.



J'appelle r le rayon du cercle AB, et je désigne par l la distance $O\omega$.

J'imagine le plan bitangent qui passe par la ligne BB'.

Un point M du cercle générateur viendra, quand le cercle tournera autour de l'axe, rencontrer le plan bitangent en un point de la section cherchée.

Afin d'étudier plus facilement la nature de cette section, j'imagine que le plan bitangent tourne autour de BB', et se rabatte sur le plan méridien.

Ces deux plans font entre eux un angle dont le cosinus, comme il est aisé de le vérifier, a pour valeur $\frac{r}{l}$.

De sorte que le point M du cercle générateur, et le point

qui lui correspond sur le plan bitangent, sont à des distances de BB′ dont le rapport est précisément $\frac{r}{l}$.

Cela posé, je joins BM, et, sur cette direction, je prends un point μ, tel que $\frac{\mu B}{MB} = \frac{l}{r}$. Le lieu des points μ sera un cercle décrit sur BA′ comme diamètre, car $A'B = 2l$, et par conséquent $\frac{A'B}{AB} = \frac{l}{r}$.

Or, je dis que le point μ correspond précisément à M dans la génération de la section que nous avons supposée.

D'abord les distances de μ et de M à BB′ sont bien, par la construction de μ, dans le rapport de l à r.

Et nous pouvons ensuite remarquer que OM, dont la distance se conserve dans la rotation et dans le rabattement, est égale à $O\mu$.

En effet, la perpendiculaire OP sur $M\mu$ tombe au milieu de $M\mu$; car le lieu du point P, sommet de l'angle droit OPB, est la circonférence dont OB est le diamètre; et puisque $OA = OA'$, cette circonférence est le lieu des milieux des segments μM sur les droites issues de B.

Ainsi la section du tore par un plan bitangent se compose de deux circonférences dont les diamètres sont A′B et AB′.

PROBLÈME PROPOSÉ A L'EXAMEN DE 1844 POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR MM. MISTER ET NEUBERG,
Professeurs de Mathématiques à Nivelles (Belgique).

Ce problème a été résolu par *M. Choquet,* au moyen des coordonnées polaires (voir *Nouvelles Annales,* t. III,

p. 439), mais on peut aussi le traiter très-simplement en employant les coordonnées rectangulaires.

Nous reproduisons l'énoncé : *Un angle constant tourne autour de son sommet placé au foyer d'une courbe du second degré ; aux points où les deux côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe : trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.*

Plaçons l'origine au foyer, les axes étant rectangulaires et l'axe des x perpendiculaire à la directrice ; l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = (mx + p)^2,$$

où

$$(2) \qquad y^2 + (1 - m^2)x^2 - 2mpx - p^2 = 0,$$

et celle d'une tangente en un point (x', y')

$$(3) \qquad yy' + (1 - m^2)xx' - mp(x + x') - p^2 = 0.$$

Soient A le point de contact, F le foyer ; joignons FA, et soit

$$y = \delta x$$

l'équation de cette droite. On aura

$$(4) \qquad y' = \delta x'.$$

Les équations (3) et (4) étant résolues par rapport à x' et y' donnent

$$x' = \frac{p(mx + p)}{\delta y + x - m(mx + p)},$$

$$y' = \frac{\delta p(mx + p)}{\delta y + x - m(mx + p)}.$$

Mais le point A étant situé sur la courbe, on a, entre

ses coordonnées x' et y', la relation

$$y'^2 + x'^2 = (mx' + p)^2,$$

et en substituant, il vient

$$(1 + \delta^2)(mx + p)^2 = (\delta y + x)^2,$$

ou

$$(5)\qquad \delta^2 - \frac{2xy}{(mx+p)^2 - y^2}\cdot\delta + \frac{(mx+p)^2 - x^2}{(mx+p)^2 - y^2} = 0.$$

Cette équation en δ et les coordonnées x et y d'un point du lieu, étant du second degré, donnera pour δ deux valeurs qui seront les tangentes des angles que font avec l'axe des x les rayons vecteurs FA, FA' joignant le foyer aux points de contact A et A'. Soient δ et δ' ces deux valeurs, nous aurons

$$(6)\qquad \delta + \delta' = \frac{2xy}{(mx+p)^2 - y^2},$$

$$(7)\qquad \delta\delta' = \frac{(mx+p)^2 - x^2}{(mx+p)^2 - y^2},$$

et par suite

$$(8)\qquad \delta - \delta' = \frac{2(mx+p)\sqrt{y^2 + x^2 - (mx+p)^2}}{(mx+p)^2 - y^2}.$$

Mais l'angle AFA' est constant et égal à 2α; on a donc

$$(9)\qquad \frac{\delta - \delta'}{1 + \delta\delta'} = \operatorname{tang} 2\alpha.$$

Substituons les valeurs (7) et (8) dans l'égalité (9) et nous aurons pour l'équation de la courbe cherchée

$$\frac{2(mx+p)\sqrt{y^2 + x^2 - (mx+p)^2}}{(mx+p)^2 - y^2 - x^2 + (mx+p)^2} = \operatorname{tang} 2\alpha.$$

Cette équation est du quatrième degré, mais elle se dé-

compose aisément en deux équations du second degré. En chassant le dénominateur, on la met sous la forme

$$y^2 + x^2 - (mx+p)^2 + \frac{2}{\tan 2\alpha}$$
$$\times (mx+p)\sqrt{y^2+x^2-(mx+p)^2} = (mx+p)^2.$$

Elle peut être résolue comme une équation du second degré en considérant $\sqrt{y^2+x^2-(mx+p)^2}$ comme l'inconnue; on en tire

$$\sqrt{y^2+x^2-(mx+p)^2} = -(mx+p)\left(\frac{1\pm\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}}{\tan 2\alpha}\right):$$

or,

$$\frac{1\pm\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}}{\tan 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha \pm 1}{\sin 2\alpha};$$

substituons et élevons au carré, il vient

$$y^2+x^2-(mx+p)^2 = (mx+p)^2\left(\frac{\cos 2\alpha \pm 1}{\sin 2\alpha}\right)^2,$$

ou, en séparant les signes,

$$y^2+x^2-(mx+p)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0,$$

$$y^2+x^2-(mx+p)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = 0.$$

Nous trouvons ainsi deux courbes du second degré; l'une d'elles donne le lieu demandé, l'autre correspond au cas où l'on remplace l'angle 2α par son supplément. Elles ont même foyer et même directrice que la courbe proposée (*).

(*) La théorie des polaires réciproques conduit immédiatement à ce résultat. Il est en effet évident que l'enveloppe de la corde des contacts de deux tangentes menées à un cercle sous un angle donné est un autre cercle

Si la courbe donnée est une ellipse, m est plus petit que l'unité et ces équations peuvent représenter l'une ou l'autre des trois courbes du second degré.

Si la courbe donnée est une hyperbole ou une parabole, on a $m > 1$ ou $m = 1$, et les équations représentent des hyperboles.

L'angle mobile, au lieu d'être constant, pourrait varier d'après une loi déterminée, et les calculs précédents seraient encore applicables. Supposons, par exemple, que les côtés de l'angle restent parallèles à un système de diamètres conjugués d'une autre conique donnée. Dans ce cas, δ et δ' devront satisfaire à une équation de la forme

$$2A\delta\delta' + B(\delta + \delta') + 2C = 0;$$

en y remplaçant $\delta\delta'$ et $\delta + \delta'$ par leurs valeurs fournies par les équations (6) et (7), on aura

$$(A + C)(mx + p)^2 - Ay^2 + Bxy - Cx^2 = 0.$$

On peut traiter de la même manière la question suivante.

Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé en un point d'une courbe du second degré; aux points où les côtés de l'angle rencontrent la courbe on mène des tangentes à cette courbe : trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

---

concentrique au premier. De là il faut conclure que si d'un foyer d'une conique on mène sous un angle donné deux rayons vecteurs et par leurs extrémités des tangentes à la courbe, le lieu du point de rencontre de ces tangentes est une autre conique ayant le même foyer que la première et la même directrice correspondante à ce foyer. Car on sait qu'en prenant pour *courbe auxiliaire* une circonférence dont le centre coïncide avec le foyer F d'une conique C, la polaire réciproque de C est une circonférence C', et que, inversement, toute circonférence c' concentrique à C' correspond à une conique c ayant F pour foyer et la même directrice que C. G.

Soit A le sommet de l'angle : prenons pour axe des x le diamètre AO, et pour axe des y une tangente à la courbe au point A, son équation sera

$$(1) \qquad y^2 - 2px - qx^2 = 0,$$

et celle d'une tangente en un point (x', y') :

$$(2) \qquad yy' - p(x + x') - qxx' = 0.$$

Soit B le point de contact, et soit

$$y = \delta x$$

l'équation de AB, on aura

$$(3) \qquad y' = \delta x',$$

d'où l'on tire, en résolvant les équations (2) et (3),

$$x' = \frac{px}{\delta y - p - qx}, \quad y' = \frac{\delta px}{\delta y - p - qx}.$$

Mais le point (x', y') étant sur la courbe, on a aussi

$$y'^2 - 2px' - qx'^2 = 0;$$

en substituant et ordonnant par rapport à δ, il viendra

$$\delta^2 - \frac{2y}{x}\delta + \frac{2p + qx}{x} = 0.$$

Cette équation donne les deux valeurs de δ, et, par suite,

$$\delta + \delta' = \frac{2y}{x},$$

$$\delta\delta' = \frac{2p + qx}{x},$$

d'où

$$\delta - \delta' = \frac{2}{x}\sqrt{y^2 - 2px - qx^2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation

$$\frac{(\delta - \delta')\sin\theta}{1 + \delta\delta' + (\delta + \delta')\cos\theta} = \operatorname{tang} 2\alpha,$$

qui exprime que l'angle 2α est constant; θ étant l'angle des axes, il vient

$$x[(y^2 - 2px - qx^2)4\sin^2\theta - (2p + x + qx + 2y\cos\theta)^2 \operatorname{tang}^2 2\alpha] = 0.$$

Cette équation est satisfaite par

$$x = 0,$$

ce qui donne l'axe des y, et par

$$(y^2 - 2px - qx^2)4\sin^2\theta - (2p + x + qx + 2y\cos\theta)^2 \operatorname{tang}^2 2\alpha = 0,$$

qui représente une courbe du second degré.

Si l'angle donné était droit, tang 2α serait infinie et le lieu serait une ligne droite ayant pour équation

$$2p + x + qx + 2y\cos\theta = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE;

PAR M. PAINVIN.

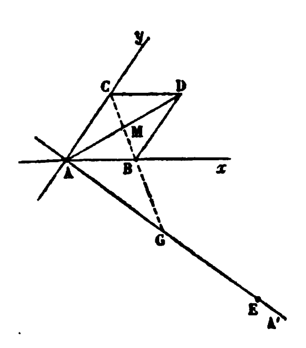
Voici l'énoncé :

On donne trois points fixes A, B, C, *et une droite fixe* AA' *passant par le point* A : *trouver le lieu des points de contact des droites parallèles à* AA' *et tangentes aux coniques passant par les trois points* A, B, C, *et touchant la droite* AA'.

Ce lieu est une conique; on demande le lieu des foyers de ces coniques lorsqu'on fait varier la position de la droite AA'.

I.

Je prends pour axes les droites AB et AC et je désigne par a et b les longueurs AB et AC; la conique, passant



par les deux points B, C et tangente en A à la droite AA' (ou $y - mx = 0$), peut être considérée comme circonscrite à un quadrilatère dont les côtés opposés seraient AB et AC, BC et AA'; l'équation générale des coniques satisfaisant aux conditions imposées est donc

$$(1) \qquad \lambda xy + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)(y - mx) = f(x, y) = 0.$$

Considérons une tangente parallèle à la droite AA'; soit

$$y = mx + \mu$$

l'équation de cette parallèle; si $(x_1\, y_1)$ sont les coordonnées du point de contact avec les coniques (1), l'équation de la tangente en ce point sera

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1} = 0, \quad f(x_1, y_1) = 0.$$

Identifions les équations de ces deux droites ; on a

$$(2) \qquad \frac{f'_{x_1}}{m} = \frac{f'_{y_1}}{-1} = \frac{f'_{z_1}}{\mu};$$

au lieu de la condition $f(x_1, y_1) = 0$, je prendrai ici la relation équivalente

$$(3) \qquad y_1 = mx_1 + \mu.$$

L'équation du lieu des points de contact s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les relations (2) et (3). En effectuant les différentiations et en supprimant les indices, les équations deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda y + \frac{1}{a}(y - mx) - m\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{m} \\ = \dfrac{\lambda x + \frac{1}{b}(y - mx) + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{-1} = \dfrac{-(y - mx)}{\mu}, \\ y - mx = \mu. \end{array}\right.$$

En substituant pour μ la valeur donnée par la dernière relation, et en laissant de côté la solution

$$y - mx = 0,$$

on obtient les deux équations

$$\frac{\lambda y + \frac{1}{a}(y - mx) - m\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{m}$$
$$= \frac{\lambda x + \frac{1}{b}(y - mx) + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)}{-1} = -1.$$

L'élimination de λ s'effectue immédiatement, et on

trouve pour *l'équation du lieu des points de contact des tangentes parallèles à la droite* AA' :

$$(S)\ (I)\qquad \frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}-y-mx=0.$$

Cette équation donne des ellipses et des hyperboles ; le cercle ne peut se présenter que dans le cas très-particulier où l'angle CAB est droit.

Les coniques S sont, quel que soit m, circonscrites au parallélogramme fixe ABCD; la tangente en A est conjuguée harmonique, par rapport aux axes Ax et Ay, de la droite ou tangente AA'.

Les axes Ax et Ay sont constamment parallèles à un système de diamètres conjugués.

Enfin le centre des coniques S est fixe, quel que soit m, et coïncide avec le centre du parallélogramme ABCD.

L'équation des coniques (S) rapportées à leur centre est

$$(S)\ (II)\qquad \frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{ma+b}{4}=0.$$

II.

Pour trouver le lieu des foyers des coniques S, je prendrai pour origine le centre fixe de ces coniques et je conserverai les axes parallèles aux droites Ax et Ay ; l'équation de la courbe est alors

$$(S)\ (1)\qquad \frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{ma+b}{4}=F(x,y)=0.$$

Je rappelle que le foyer d'une conique peut être *défini analytiquement :* le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique.

Pour appliquer cette définition, je prends d'abord l'é-

quation quadratique des tangentes menées d'un point à la conique ; j'exprime ensuite que cette équation représente un cercle, et le point considéré sera évidemment le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique : c'est-à-dire un foyer.

Soient (α, β, γ) les coordonnées homogènes d'un foyer : l'équation quadratique des tangentes menées de ce point à la courbe (1) est

$$4\,F(\alpha, \beta, \gamma)\,F(x, y, z) - [\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z]^2 = 0.$$

En ayant égard à la définition (1) de la fonction F, et en faisant $y = 1$, $z = 1$, après les différentiations, cette équation devient

$$\left(\frac{m\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right)\left(\frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right) - \left[\frac{m\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} - \frac{ma+b}{4}\right]^2 = 0.$$

Nous exprimerons que cette équation représente un cercle en écrivant que les rapports du coefficient du rectangle à chacun des coefficients des carrés sont égaux au double du cosinus de l'angle des axes ; de sorte que, θ étant l'angle des axes, on a les relations

$$-\frac{m\alpha\beta}{ab} = \cos\theta\left[\frac{m}{a}\left(\frac{m\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right) - \frac{m^2\alpha^2}{a^2}\right],$$

$$-\frac{m\alpha\beta}{ab} = \cos\theta\left[\frac{1}{b}\left(\frac{m\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} - \frac{ma+b}{4}\right) - \frac{\beta^2}{b^2}\right];$$

l'équation du lieu des foyers s'obtiendra en éliminant m entre ces deux équations.

En remplaçant α, β par x, y, et en effectuant quelques simplifications visibles, les deux équations précédentes

est une courbe du second degré qui passe par les milieux des côtés et des diagonales de ce quadrilatère, et par les points d'intersection des côtés opposés ; car il résulte immédiatement de cette proposition, que le lieu du point de contact de la tangente parallèle à AA' (p. 358), menée à une conique passant par les points B, C, et tangente à AA' au point A, est une autre conique circonscrite au parallélogramme ABCD, et dont un cinquième point E s'obtient en prenant sur la droite donnée AA' une distance AE double de la distance de A au point de rencontre G des droites AA', BC. Les tangentes menées à cette dernière conique, aux extrémités B, C de son diamètre BC, sont parallèles à la corde AE qui est divisée en deux parties égales par ce diamètre; il est facile d'en conclure que la tangente au point A est conjuguée harmonique de AA', par rapport aux droites AB, AC.

La seconde partie de la question proposée, relative au lieu des foyers des coniques circonscrites à un parallélogramme donné, ne se résout pas avec la même facilité, elle exige quelques calculs.

Le savant professeur à qui l'on doit la solution donnée (p. 360 et suiv.) a trouvé l'équation du lieu géométrique des foyers, par des calculs au sujet desquels il « rappelle que le foyer d'une conique peut être *défini analytiquement :* le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique (*). » Comme cette définition ne se trouve encore dans aucun ouvrage élémentaire écrit en français, il se peut qu'elle ne soit pas connue de tous les candidats aux Écoles Normale et Polytechnique. C'est ce qui me détermine à indiquer un autre moyen d'obtenir l'équation du lieu cherché, sans qu'il soit nécessaire de

(*) En des points imaginaires situés sur la directrice correspondante au foyer.

savoir qu'un foyer est le centre d'une circonférence nulle, doublement tangente, etc.

Pour plus de précision, je suppose que la conique circonscrite au parallélogramme ABCD (p. 358) soit une ellipse; je désigne par $2a$ son grand axe, et par F, F′ ses foyers. De sorte que

$$AF + AF' = 2a$$

ou, parce que $AF' = DF$,

$$AF + DF = 2a.$$

De même,

$$BF + CF = 2a;$$

donc

$$AF - BF = CF - DF.$$

Cette dernière égalité montre que le point F appartient à la fois à deux hyperboles ayant respectivement leurs foyers aux points A, B et C, D, et dont les axes transverses ont la même valeur. En outre, les droites AB, CD sont égales et parallèles; donc ces hyperboles sont égales et semblablement placées.

Actuellement, je prends pour axe des x une parallèle aux droites AB, CD, menée par le centre M de la conique circonscrite au parallélogramme ABCD; et pour axe des y une perpendiculaire élevée à l'axe des x au point M. Puis, je nomme α, β les coordonnées du milieu de CD; $2a$, $2b$, les axes d'une hyperbole ayant ses foyers en C et D; et $2c$ la droite CD. Les équations des deux hyperboles égales seront

$$(1) \qquad a^2(y-\beta)^2 - b^2(x-\alpha)^2 = -a^2b^2$$

$$(2) \qquad a^2(y+\beta)^2 - b^2(x+\alpha)^2 = -a^2b^2,$$

et, de plus, on aura

$$(3) \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Pour déterminer l'équation du lieu des foyers F, il faut éliminer a^2, b^2, entre les relations (1), (2), (3). Or, c'est là une élimination bien facile à effectuer, car la soustraction des équations (1), (2), donne immédiatement

$$(4) \qquad a^2\beta y - b^2\alpha x = 0;$$

et, des équations (3) et (4), on tire, par un calcul des plus simples,

$$a^2 = \frac{c^2\alpha x}{\alpha x + \beta y}, \quad b^2 = \frac{c^2\beta y}{\alpha x + \beta y}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer a^2, b^2, par ces valeurs dans l'équation (1); il en résulte successivement

$$\frac{\alpha x(y-\beta)^2 - \beta y(x-\alpha)^2}{\alpha x + \beta y} = -\frac{c^2\alpha\beta xy}{(\alpha x + \beta y)^2};$$

$$\frac{(xy - \alpha\beta)(\alpha y - \beta x)}{\alpha x + \beta y} = -\frac{c^2\alpha\beta xy}{(\alpha x + \beta y)^2};$$

$$(5) \qquad (xy - \alpha\beta)(\alpha y - \beta x)(\alpha x + \beta y) = -c^2\alpha\beta xy,$$

ce qui est l'équation cherchée.

Quand l'angle BAC est droit, $\alpha = 0$, et l'équation (5) se réduit à $(xy)^2 = 0$.

Elle représente alors le système de deux droites menées du point M, parallèlement aux droites AB, AC. Cela doit être en effet, puisque les axes de toute conique circonscrite à un rectangle sont parallèles à ses côtés, et que les foyers d'une conique appartiennent nécessairement à l'un de ses axes.

Dans le cas général où l'angle A n'est pas droit, on rendra plus facile la construction de la courbe que l'équation (5) représente, en la rapportant à des coordonnées polaires, au moyen des formules

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

Afin d'obtenir sous sa forme la plus simple l'équation résultant de ce changement de coordonnées, nous remarquerons qu'en désignant par $2b$ le côté AC du parallélogramme ABCD, les coordonnées rectilignes α, 6, du milieu de CD, ont pour valeurs

$$b \cos A, \quad b \sin A.$$

En remplaçant, dans l'équation (5), x, y α, β par

$$\rho \cos \omega, \quad \rho \sin \omega, \quad b \cos A, \quad b \sin A,$$

et ayant égard aux formules

$$\sin \omega \cos \omega = \frac{1}{2} \sin 2\omega, \quad \sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A,$$

$$(\sin \omega \cos A - \sin A \cos \omega)(\cos \omega \cos A + \sin A \cos \omega)$$
$$= \frac{1}{2} \sin 2(\omega - A),$$

on trouve

$$(\rho^2 \sin 2\omega - b^2 \sin 2A) . \sin 2(\omega - A) = -c^2 \sin 2A . \sin 2\omega;$$

d'où

$$(6) \qquad \rho^2 = \sin 2A \left(\frac{b^2}{\sin 2\omega} - \frac{c^2}{\sin 2(\omega - A)} \right).$$

G.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 663 (*seconde solution*)

(voir 2e série, t. II, p. 336);

PAR M. A. S., ABONNÉ.

Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans

un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient les arêtes du tétraèdre.

(E. Beltrami.)

Je prends le tétraèdre pour tétraèdre de référence et je suppose les paramètres de référence égaux à l'unité. Je désigne par A, B, C, D, V les aires des faces du tétraèdre et son volume, et je rappelle que les coordonnées x, y, z, t d'un point vérifient la relation

$$Ax + By + Cz + Dt = 3V.$$

Cela posé, la surface dont l'équation est

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0$$

satisfait à toutes les conditions de l'énoncé.

Il est évident d'abord qu'elle passe par les arêtes du tétraèdre; de plus, les sommets du tétraèdre sont des points doubles de la surface. En effet, je cherche l'intersection avec une droite passant par le sommet A ($y = \beta t$, $z = \gamma t$); je trouve

$$A\beta\gamma t^3 + B\gamma x t^2 + C\beta x t^2 + D\beta\gamma x t^2 = 0;$$

le premier membre est divisible par t^2, donc le point est un point double. Cette droite sera tangente si l'on pose

$$B\gamma + C\beta + D\beta\gamma = 0.$$

Donc le cône des tangentes au sommet A a pour équation

$$\frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0.$$

Il en est de même pour les autres sommets.

Je dis de plus que les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des sphères inscrites sont sur cette surface. Ces centres sont à l'inter-

section des plans bissecteurs des dièdres du tétraèdre. Les coordonnées du centre vérifient donc les relations

$$x_1 = y_1 = z_1 = t_1, \qquad x_2 = y_2 = z_2 = -t_2$$
$$x_3 = y_3 = -z_3 = t_3, \qquad x_4 = y_4 = -z_4 = -t_4,$$
$$x_5 = -y_5 = z_5 = t_5, \qquad x_6 = -y_6 = z_6 = -t_6,$$
$$x_7 = -y_7 = -z_7 = t_7, \qquad x_8 = -y_8 = -z_8 = -t_8,$$

et la relation générale

$$Ax + By + Cz + Dt = 3V.$$

Les coordonnées du point milieu de la droite 1,2 par exemple sont

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

Or,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 3V,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Dt_2 = 3V;$$

les coordonnées du point milieu sont donc de la forme

$$x' = y' = z' = k(A + B + C), \quad t' = -kD.$$

Ces coordonnées vérifient évidemment l'équation de la surface, car on a identiquement

$$\frac{A}{A+B+C} + \frac{B}{A+B+C} + \frac{C}{A+B+C} - \frac{D}{D} = 0.$$

Les coordonnées des points milieux auront d'autres formes que celles que nous venons de voir, mais elles se ramènent aux formes dont les types sont par exemple :

$$[x = y = k(A + B), \quad z = t = -k(C + D)],$$
$$[x = y = z = k(A + B + C), \quad t = -kD];$$
$$[x = y = k(A + B), \quad z = -t = -k(C - D)],$$
$$[y = z = -t = +k(B + C - D), \quad x = -kA];$$
$$[x = -t = k(A - D), \quad -z = y = -k(B - C)],$$

où x, y, z, t sont les coordonnées d'un point milieu et k une constante arbitraire. Il est facile de voir que ces coordonnées vérifient l'équation de la surface indiquée

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{t}=0.$$

Je remarque que cette équation est tout à fait semblable à celle du cercle circonscrit à un triangle. La surface qu'elle représente jouit d'une propriété analogue à celle du cercle, qui est la suivante :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la surface sur les faces du tétraèdre sont dans un même plan.

En effet, on a la relation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{A^2}{\begin{vmatrix}1 & \cos\widehat{zy} & \cos\widehat{ty}\\ \cos\widehat{zy} & 1 & \cos\widehat{zt}\\ \cos\widehat{ty} & \cos\widehat{zt} & 1\end{vmatrix}}=\frac{B^2}{\begin{vmatrix}1 & \cos\widehat{xz} & \cos\widehat{xt}\\ \cos\widehat{xz} & 1 & \cos\widehat{zt}\\ \cos\widehat{xt} & \cos\widehat{zt} & 1\end{vmatrix}}\\ &=\frac{C^2}{\begin{vmatrix}1 & \cos\widehat{xy} & \cos\widehat{xt}\\ \cos\widehat{yx} & 1 & \cos\widehat{yt}\\ \cos\widehat{tx} & \cos\widehat{ty} & 1\end{vmatrix}}=\frac{D^2}{\begin{vmatrix}1 & \cos\widehat{xy} & \cos\widehat{xz}\\ \cos\widehat{xy} & 1 & \cos\widehat{yz}\\ \cos\widehat{zx} & \cos\widehat{zy} & 1\end{vmatrix}}.\end{aligned}\right.$$

L'équation de la surface est

$$Ayzt+Bxzt+Cxyt+Dxyz=0.$$

Je remplace A, B, C, D par les quantités proportionnelles indiquées par la relation (1). Or

$$yzt\begin{vmatrix}1 & \cos\widehat{yz} & \cos\widehat{yt}\\ \cos\widehat{zy} & 1 & \cos\widehat{zt}\\ \cos\widehat{ty} & \cos\widehat{tz} & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

égale six fois le volume du tétraèdre formé avec les perpendiculaires aux faces $y=0$, $z=0$, $t=0$. Les autres termes ont une signification analogue. Donc :

La somme algébrique des volumes des tétraèdres obtenus en prenant trois à trois les perpendiculaires aux faces du tétraèdre menées d'un point de la surface est nulle; donc enfin les pieds de ces quatre perpendiculaires sont dans un même plan.

Question 681

(voir page 72);

PAR M. DE SAINT-PRIX.

La seconde égalité de la question 681 n'est démontrée par M. de Virieu que dans le cas particulier où les angles a, b, c sont liés entre eux par la relation

$$a+b+c=(2k+1)\pi.$$

Je me propose, dans ce qui va suivre, de traiter la question d'une manière générale.

Dans la démonstration que j'avais voulu en donner, et qu'une erreur de calcul rendait illusoire, j'étais arrivé à la relation

$$\frac{\cos a}{\sin c\cos b}-\frac{\cos a}{\sin b\cos c}+\frac{\cos b}{\sin a\cos c}-\frac{\cos b}{\sin c\cos a}+\frac{\cos c}{\sin b\cos a}-\frac{\cos c}{\sin a\cos b}=0.$$

On peut l'écrire

$$\cos a\sin 2a\sin(b-c)+\cos b\sin 2b\sin(c-a)+\cos c\sin 2c\sin(a-b)=0.$$

A l'aide des formules qui changent un produit de sinus en une différence de cosinus, cette égalité peut s'écrire,

après avoir chassé le dénominateur qui est numérique,

$$\left.\begin{array}{r}\cos a[\cos(2a-b+c)+\cos(2a+b-c)]\\+\cos b[\cos(2b-c+a)+\cos(2b+c-a)]\\+\cos c[\cos(2c-a+b)+\cos(2c+a-b)]\end{array}\right\}=0.$$

En développant, faisant les réductions et recomposant les termes deux à deux, l'égalité devient

$$\left.\begin{array}{r}\cos(a-b+3c)-\cos(a-b-3c)\\+\cos(b-c+3a)-\cos(b-c-3a)\\+\cos(c-a+3b)-\cos(c-a-3b)\end{array}\right\}=0,$$

ou, en transformant les différences de cosinus en produits de sinus,

$$\sin(a+b+c)\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(c-b)=0 \quad (*).$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs du produit le soit.

La condition

$$\sin(a+b+c)=0$$

donne la relation

$$a+b+c=k\pi$$

entre les angles a, b, c (k étant un nombre entier quelconque).

La condition

$$\sin(a-b)=0$$

donne la relation

$$a-b=k_1\pi,$$
$$a-b=0.$$

On retrouve ainsi que si deux arcs sont égaux, le troisième quelconque, la relation (2) est vérifiée.

Les deux autres facteurs donneraient lieu aux mêmes remarques.

(*) Cette transformation nous a aussi été indiquée par M. J. B., abonné.

Question 696 (Michael Roberts);

Par M. BOUTMY,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

M. Michaël Roberts propose de démontrer le tableau suivant relatif à la réalité des racines de l'équation

$$(1) \qquad x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0:$$

(2) $\quad p > 0,\quad$ une racine réelle, quatre imaginaires,

(3) $\quad \left\{\begin{array}{l} p < 0 \\ p^5 + \dfrac{q^2}{4} < 0 \end{array}\right\}\quad$ cinq racines réelles.

(4) $\quad \left\{\begin{array}{l} p < 0 \\ p^5 + \dfrac{q^2}{4} > 0 \end{array}\right\}\quad$ une racine réelle, quatre imaginaires.

Je remarque d'abord que le tableau peut se réduire aux deux conditions suivantes :

(5) $\quad p^5 + \dfrac{q^2}{4} > 0,\quad$ une racine réelle, quatre imaginaires,

(6) $\quad p^5 + \dfrac{q^2}{4} < 0,\quad$ cinq racines réelles.

En effet, si l'on a p positif, on aura nécessairement $p^5 + \dfrac{q^2}{4}$ positif, donc la condition (5) tient lieu des deux conditions (2) et (4); de même, si l'on a $p^5 + \dfrac{q^2}{4}$ négatif on aura nécessairement p négatif; donc la condition (6) suffit pour remplacer la condition (3).

Je vais résoudre l'équation proposée par une méthode analogue à celle que l'on suit pour résoudre algébrique-

ment l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0.$$

Posons

$$x = y + z,$$

l'équation (1) deviendra

$$(y + z)^5 + 5p(y + z)^3 + 5p^2(y + z) + q = 0,$$

ou, en groupant les termes,

$$y^5 + z^5 + q + 5(yz + p)(y^3 + z^3 + 2yz^2 + 2y^2z + py + pz) = 0.$$

Si l'on établit entre y et z la relation

(7) $\left\{ \begin{array}{ll} & yz = -p, \\ \text{on aura} & \\ & y^5 + z^5 = -q. \end{array} \right.$

Je remarque que les racines de ce système sont les racines du système

(8) $\left\{ \begin{array}{l} y^5 + z^5 = -q, \\ y^5 z^5 = -p^5, \end{array} \right.$

qui rendent le produit yz réel.

Le système (8) donne

$$y^5 = -\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}, \quad z^5 = -\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° y^5 et z^5 sont imaginaires, ce qui entraîne la condition

$$\frac{q^2}{4} + p^5 < 0;$$

2° y^5 et z^5 sont réels, ce qui entraîne la condition

$$\frac{q^2}{4} + p^5 > 0.$$

1° $\frac{q^2}{4} + p^5 < 0$ *et par suite* $p < 0$. — Dans ce cas, je dis que l'équation proposée a ses cinq racines réelles, et je vais indiquer la marche à suivre pour les calculer :

Puisque $p^5 + \frac{q^2}{4}$ est négatif, les valeurs de y^5 et de z^5 sont imaginaires et peuvent s'écrire

$$y^5 = R(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad z^5 = R(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

en posant

$$R = \sqrt[2]{-p^5}, \quad \cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt[2]{-p^5}}, \quad \sin\alpha = \sqrt[2]{\frac{\frac{q^2}{4} + p^5}{p^5}};$$

par suite nous aurons, k et k' prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, 4,

$$y = R^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{5}\right),$$

$$z = R^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k'\pi}{5} - i\sin\frac{\alpha + 2k'\pi}{5}\right)$$

$$= R^{\frac{1}{5}}\left(\cos - \frac{\alpha + 2k'\pi}{5} + i\sin - \frac{\alpha + 2k'\pi}{5}\right),$$

d'où

$$yz = R^{\frac{2}{5}}\left[\cos\frac{2(k - k')\pi}{5} + i\sin\frac{2(k - k')\pi}{5}\right].$$

k et k' étant plus petits que 5, leur différence ne pourra être un multiple de 5; donc yz ne sera réel que si k est égal à k'.

Ainsi, pour former la somme $y + z$, c'est-à-dire x, nous choisirons des valeurs de y et de z ayant même argument : cela nous donnera

$$x = 2R^{\frac{1}{5}}\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{5}.$$

2° $p^5 + \frac{q^2}{4} > 0$. — Alors les valeurs de y^5 et de z^5 sont réelles; soient A et B les racines cinquièmes réelles de $-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}$ et $-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}$; soit aussi α une racine cinquième imaginaire de l'unité.

y aura les valeurs

$$A,\quad A\alpha,\quad A\alpha^2,\quad A\alpha^3,\quad A\alpha^4,$$

et z aura les valeurs

$$B,\quad B\alpha,\quad B\alpha^2,\quad B\alpha^3,\quad B\alpha^4.$$

Le tableau suivant montre les cinq couples de valeurs de y et de z qui donnent pour yz une valeur réelle et par suite une valeur convenable pour x :

$$\begin{array}{llll}
y_1 = A, & z_1 = B, & y_1 z_1 = AB, & x_1 = A + B, \\
y_2 = A\alpha, & z_2 = B\alpha^4, & y_2 z_2 = AB, & x_2 = A\alpha + B\alpha^4, \\
y_3 = A\alpha^2, & z_3 = B\alpha^3, & y_3 z_3 = AB, & x_3 = A\alpha^2 + B\alpha^3, \\
y_4 = A\alpha^3, & z_4 = B\alpha^2, & y_4 z_4 = AB, & x_4 = A\alpha^3 + B\alpha^2, \\
y_5 = A\alpha^4, & z_5 = B\alpha, & y_5 z_5 = AB, & x_5 = A\alpha^4 + B\alpha.
\end{array}$$

On voit qu'il y a pour x une seule valeur réelle x_1 et quatre valeurs imaginaires conjuguées deux à deux.

On calculera A et B au moyen d'une tangente, ou d'un sinus auxiliaire suivant que p sera positif ou négatif, comme on le fait pour l'équation du troisième degré.

3° $\frac{q^2}{4} + p^5 = 0$. — Dans ce cas B est égal à A; si on remplace B par A dans les valeurs précédemment trouvées pour x, on voit qu'il vient :

$$x_1 = 2A,$$
$$x_2 = A(\alpha + \alpha^4) = x_5,$$
$$x_3 = A(\alpha^2 + \alpha^3) = x_4.$$

Ces cinq racines sont réelles, car α et α^4, α^2 et α^3 sont des quantités imaginaires conjuguées.

Ainsi, dans le cas où $\frac{q^2}{4} + p^5$ est nul, l'équation a cinq racines réelles, savoir :

Une racine simple $\quad x_1 = 2\sqrt[5]{-\frac{q}{2}}$,

Une racine double $\quad x_2 = x_5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt[5]{-\frac{q}{2}}$,

Une racine double $\quad x_3 = x_5 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt[5]{-\frac{q}{2}}$,

Note. — La question a été traitée à peu près de la même manière par MM. Cousin, Jaufroid et Réalis. Ce dernier remarque que l'équation de M. Roberts est un cas particulier de certaines équations résolues par Moivre, et nous envoie sur ce sujet un Mémoire que nous insérerons bientôt.

Même question;

PAR M. ROUSSEAU,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser).

Appliquons à cette équation le théorème de Rolle; la dérivée du premier membre égalée à zéro sera

$$x^4 + 3px^2 + p^2 = 0,$$

dont les quatre racines rangées par ordre de grandeur dans le cas de $p < 0$ sont

$$+\sqrt{-p\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}},\quad +\sqrt{-p\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}},$$

$$-\sqrt{-p\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\quad -\sqrt{-p\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}},$$

Pour que les cinq racines de l'équation proposée soient

réelles, il faut que les résultats des substitutions de $+\infty$, des quatre quantités ci-dessus, et de $-\infty$ à x dans cette équation, donnent des résultats alternativement positifs et négatifs. Or, la substitution de $\pm\sqrt{-p\,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$ dans la fonction

$$x^4+5px^2+5p^2$$

donne

$$p^2(1\mp\sqrt{5});$$

et, comme l'équation proposée peut s'écrire

$$x(x^4+5px^2+5p^2)+q,$$

les résultats de toutes les substitutions sont compris dans la formule

$$\pm 2p^2\sqrt{-p}+q.$$

Par suite toutes les conditions de réalité seront remplies si

$$p^5+\frac{q^2}{4}<0.$$

Si $p^5+\frac{q^2}{4}>0$, les racines de la dérivée ne sépareront pas celles de la proposée, et il y aura quatre racines imaginaires.

Enfin, si $p>0$, la dérivée a toutes ses racines imaginaires, et par suite la proposée n'a qu'une racine réelle.

Note. — Solutions analogues de MM. Bailly, Leclère; Grassat et Vialay, elèves du lycée de Lyon; A. T. et E. G., élèves du collége Chaptal; du Mesnil; Massing, élève de M. Moutard; Mirza-Nizam.

CORRESPONDANCE.

Un professeur nous communique une solution de la question proposée, cette année, au concours des Lycées de Paris, pour les classes de mathématiques spéciales.

Cette solution offre une application remarquable de la méthode qui consiste à exprimer chacune des deux coordonnées variables d'un point en fonction d'une nouvelle variable indépendante. Pour mettre en évidence l'utilité de cette méthode, la question proposée a été on ne peut mieux choisie.

En voici d'abord l'énoncé :

Une parabole étant donnée, on mène par le pied de sa directrice une sécante rectiligne quelconque, et par les deux points d'intersection on fait passer une parabole égale à la première et dont l'axe soit perpendiculaire à celui de la parabole donnée : trouver le lieu géométrique du sommet de la parabole mobile.

En prenant pour axes de coordonnées la directrice et l'axe de la parabole fixe, et nommant $2p$ le paramètre; α, β les coordonnées du sommet de la parabole mobile; m le coefficient angulaire de la sécante : les coordonnées x, y des points communs à ces trois lignes seront liées entre elles par les relations

$$(1) \qquad y^2 - 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0,$$

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2 - 2p(\beta - y) = 0 \text{ (*)},$$

$$(3) \qquad y = mx.$$

(*) Par les deux points d'intersection de la sécante et de la parabole donnée, on peut faire passer deux paraboles satisfaisant aux conditions de

Éliminant y, il vient :

$$(4) \qquad m^2x^2 - 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0,$$

$$(5) \qquad (x-\alpha)^2 - 2p(6 - mx) = 0.$$

Les équations (4) et (5) devant admettre les mêmes racines ont nécessairement leurs coefficients proportionnels, donc

$$\frac{m^2}{1} = \frac{p}{\alpha - pm} = \frac{p^2}{\alpha^2 - 2p6}.$$

C'est au moyen de ces dernières relations, qui donnent facilement les valeurs des coordonnées α, 6, en fonction de la variable indépendante m, que notre correspondant détermine la forme du lieu cherché, par la séparation de ses différentes branches qui ont pour asymptotes les paraboles

$$\alpha^2 - 2p6 = 0, \quad \alpha^2 - 2p6 - \alpha p = 0,$$

et en faisant connaître toutes les particularités que présente chacune de ces branches.

La même solution est aussi déduite de l'équation du lieu, qu'on obtient en éliminant l'indéterminée m entre les relations (4) et (5). Cette équation est

$$(6) \qquad (\alpha^2 - 2p6)(\alpha^2 - 2p6 - p\alpha)^2 = p^6.$$

On y satisfait en posant

$$(7) \qquad \alpha^2 - 2p6 = \lambda p^2,$$

$$(8) \qquad \alpha^2 - 2p6 - p\alpha = \frac{p^2}{\sqrt{\lambda}},$$

quelle que soit la valeur attribuée à λ.

---

l'énoncé. L'équation

$$(x-\alpha)^2 - 2p(6 - y) = 0$$

se rapporte à l'une de ces deux courbes; pour l'autre, il faudrait écrire

$$(x-\alpha)^2 + 2p(6 - y) = 0.$$

D'où

(9) $$\alpha = p\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

(10) $$6 = \frac{p}{2}\left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \lambda\right].$$

Les équations (7) et (8) montrent que les paraboles

$$\alpha^2 - 2p6 = 0, \quad \alpha^2 - 2p6 - p\alpha = 0,$$

sont asymptotes à la courbe, et les valeurs (9), (10) de α, 6, déterminent ses différents points.

RÉPONSE A UN ABONNÉ,

AU SUJET DE CETTE PROPOSITION QUE :

Si, dans le premier membre de l'équation $f(x, y) = 0$ d'une conique, on remplace les coordonnées courantes x, y, par les coordonnées α, 6 d'un point non situé sur la courbe, le résultat $f(\alpha, 6)$ de la substitution et le discriminant Δ de l'équation proposée auront le même signe, ou des signes contraires, suivant que le point $(\alpha, 6)$ sera intérieur ou extérieur à la courbe.

En représentant la conique par l'équation

(1) $$ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2b'x + 2by + a'' = 0,$$

le discriminant est

$$aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, les coordonnées α, 6 du centre ont les valeurs finies

$$\frac{a'b' - bb''}{b''^2 - aa'}, \quad \frac{ab - b'b''}{b''^2 - aa'}.$$

La substitution de ces valeurs dans le premier membre

de l'équation (1) donne

$$\frac{(a'b' - bb'')b' + (ab - b'b'')b}{b''^2 - aa'} + a'',$$

ou

$$\frac{ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''}{b''^2 - aa'}.$$

On a donc

$$(2) \qquad f(\alpha, \beta) = \frac{\Delta}{aa' - b''^2}.$$

Quand la conique est une ellipse, le centre est un point intérieur, et, de plus, la différence $aa' - b''^2$ est positive. La relation (2) montre que $f(\alpha, \beta)$ et Δ ont, alors, le même signe, ce qui aura lieu, aussi, pour tout autre point intérieur, puisque $f(\alpha, \beta)$ ne changera pas de signe.

Si l'équation (1) représente une hyperbole, on aura

$$aa' - b''^2 < 0,$$

et par suite

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{\Delta} < 0;$$

mais, dans ce cas, le centre est un point extérieur; donc, la proposition est démontrée pour l'ellipse et l'hyperbole.

Lorsque l'équation (1) appartient à une parabole, on a

$$aa' - b''^2 = 0,$$

et les coefficients a, a' ont nécessairement le même signe; on peut les supposer tous deux positifs.

Le discriminant se réduit à

$$2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2.$$

Et, parce que

$$b'' = \pm\sqrt{aa'},$$

on a

$$(3) \qquad \Delta = -(b\sqrt{a} \pm b'\sqrt{a'})^2$$

D'autre part, l'équation (1) prend la forme

(4) $$(x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a'})^2 + 2b'x + 2b''y + a'' = 0.$$

La droite représentée par

$$2b'x + 2b''y + a'' = 0$$

touche la parabole au point de rencontre de cette courbe et du diamètre

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a'} = 0.$$

Tout autre point de la tangente est extérieur à la courbe; la substitution de ses coordonnées, α, 6, à x, y, donne

(5) $$f(\alpha, 6) = (\alpha\sqrt{a} \pm 6\sqrt{a'})^2;$$

donc $f(\alpha, 6)$ et Δ ont des signes contraires. Et, par conséquent, la proposition énoncée convient aussi à la parabole. G.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XXXIII.

CODAZZA (Giovanni), professeur. — Il principe... *Le prince Boncompagni et l'Histoire des sciences mathématiques en Italie*. In-8 de 28 pages. Milan; 1864. (Extrait du *Polytecnico*, revue scientifique de Milan.)

M. Terquem a reconnu plusieurs fois, dans les *Nouvelles Annales*, le mérite et le haut intérêt des publications du prince Boncompagni. Nous empruntons à l'article de M. Codazza la liste des travaux du savant prince :

Sur quelques progrès de la Physique en Italie au XVIe siècle et au XVIIe siècle. Rome; 1846.

Sur la vie et les œuvres de Gherard de Crémone, traducteur du XIIe siècle, et de Gherard de Sabionnetta, astronome du XIIIe siècle. Rome; 1851.

Sur la vie et les œuvres de Léonard de Pise, mathématicien du XIIIe siècle. 1852.

Sur quelques ouvrages de Léonard de Pise. Rome; 1854.

Sur la résolution des équations simultanées $x^2 + k = y^2$, $x^2 - h = z^2$. Rome; 1855.

Sur une propriété des nombres. Rome; 1855.

Opuscules de Léonard de Pise. Florence; 1856.

Écrits inédits de Cossali. Rome; 1857.

Écrits inédits de Léonard de Pise. 2 volumes in-4. Rome; 1857 et 1862.

Traités d'Arithmétique du moyen âge. Rome; 1857.

M. le prince Boncompagni a encore fait les frais de la *Composition du Monde*, par Ristori d'Arezzo, publié par Narducci; 1859.

XXXIV.

Le Besgue (V.-A.), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre correspondant de l'Institut. — *Théorème sur les ellipsoïdes associés, analogue à celui de Fagnano sur les arcs d'ellipse.* In-8 de 8 pages. (Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*)

Ce théorème a déjà été donné par M. Le Besgue dans le *Journal de M. Liouville*, t. XI, p. 331. Il est présenté dans ce nouveau travail d'une manière plus géométrique, et l'on y donne l'expression des zones dont la différence est planifiable.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 614;

PAR M. LÉON DYRION,
Élève de la classe de Mathématiques spéciales du lycée de Strasbourg.

Je vois dans le tome I, 2e série, p. 126, question 614, cet énoncé de M. Mannheim :

Désignons par F *le foyer d'une ellipse donnée; en un point* M *de cette courbe menons la tangente* MT *qui coupe le petit axe en* T *et projetons le point* T *sur le rayon vecteur, en* Q. *On demande le lieu du point* Q *quand le point* M *décrit l'ellipse.*

Ce lieu est un cercle, non-seulement quand on considère le point T d'intersection de la tangente avec le petit axe, mais encore pour *une droite quelconque perpendiculaire au grand axe.*

Car, soit T un point quelconque; menons par T une droite THN tangente à l'ellipse au point H et rencontrant en N la directrice DD′ correspondante au foyer F. D'après une proposition connue, l'angle NFH est droit, et si TP représente la perpendiculaire abaissée du point T sur la direction du rayon vecteur FH, la similitude des triangles rectangles NFH, TPH donne

$$\frac{\text{FH}}{\text{HP}} = \frac{\text{HN}}{\text{HT}},$$

d'où

$$\frac{\text{FP}}{\text{FH}} = \frac{\text{NT}}{\text{NH}}.$$

Abaissons maintenant sur la directrice DD′ les perpendiculaires TT′, HH′. Les triangles rectangles NHH′, NTT′ étant semblables, nous aurons

$$\frac{NT}{NH} = \frac{TT'}{HH'}.$$

D'où

$$\frac{FP}{FH} = \frac{TT'}{HH'},$$

et par conséquent

$$FP = TT' \times \frac{FH}{HH'} = TT' \times \frac{c}{a}.$$

Si donc TT′ est constant, la distance FP sera invariable; c'est-à-dire que si le point T décrit une perpendiculaire au grand axe de l'ellipse, la projection de T sur le rayon vecteur FH décrira une circonférence ayant pour centre le foyer F.

Dans le cas particulier où la droite décrite par le point T est le petit axe de l'ellipse, on a

$$TT' = \frac{a^2}{c}$$

et

$$FP = \frac{a^2}{c} \times \frac{c}{a} = a.$$

Question 690;

PAR M. MICHEL LHOPITAL,
Élève du lycée de Lyon.

ÉNONCÉ. — *Soient* α, β, γ *les angles qu'une droite* L *fait avec ses projections sur trois plans rectangulaires;* Δ *la distance de l'origine à la droite;* a, b, c *les distances de cette même origine aux projections de la*

droite L *sur les trois plans coordonnés ; on aura*

$$\Delta^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 6 + c^2 \cos^2 \gamma.$$

(Lobatto.)

Solution. — Soient

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

les équations de la droite L; on aura, d'après une formule connue,

$$\Delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + (mq - np)^2}{m^2 + n^2 + 1}.$$

Les projections de la droite sur les trois plans coordonnés ayant respectivement pour équations

$$x = mz + p, \quad y = nz + q, \quad my - nx + np - mq = 0,$$

on a

$$a^2 = \frac{p^2}{m^2 + 1}, \quad b^2 = \frac{q^2}{n^2 + 1}, \quad c^2 = \frac{(np - mq)^2}{m^2 + n^2}.$$

D'ailleurs,

$$\sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}},$$

$$\sin 6 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}},$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}};$$

d'où

$$\cos^2 \alpha = \frac{m^2 + 1}{m^2 + n^2 + 1},$$

$$\cos^2 6 = \frac{n^2 + 1}{m^2 + n^2 + 1},$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{m^2 + n^2}{m^3 + n^2 + 1}.$$

Faisant la somme $a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2 6 + c^2\cos^2\gamma$, il vient

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2 6 + c^2\cos^2\gamma = \frac{p^2+q^2+(np-mq)^2}{m^2+n^2+1} = \Delta^2.$$

C. Q. F. D (*).

Note. — La même question a été résolue, au moyen de calculs à peu près semblables, par MM. Antony Lucotte, élève de l'institution Sainte-Barbe à Lyon; Léon Dyrion, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg; Smet-Jamar, élève du lycée Louis-le-Grand; Travelot, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Besançon; A. Leclère et Ch. Daguenet; de Virieu, et par un Abonné.

Question 702;

PAR M. DE MEYER,
Élève du lycée Charlemagne.

ÉNONCÉ. — *Soient* O *un cercle fixe,* O′ *un cercle mobile dont le centre se meut sur un autre cercle fixe* O″ : *l'axe radical des deux premiers a pour enveloppe une conique.* (DURRANDE).

Solution. — Je prends pour origine le centre du cercle O″, pour axe des x la droite passant par les centres des cercles O, O″, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite.

En nommant R, r, ρ les rayons des cercles O″, O, O′; d la distance des centres O″, O; α, 6 les coordonnées du

---

(*) La proposition énoncée est une conséquence immédiate de ce principe connu : *Le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires.* Car, projetez sur les plans coordonnés un triangle ayant un sommet à l'origine et pour base une partie quelconque, $2.l$, de la droite L. L'aire du triangle projeté sera $l.\Delta$, et ses projections auront pour valeurs $l.a\cos\alpha$, $l.b\cos 6$, $l.c\cos\gamma$; donc

$$\Delta^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2 6 + c^2\cos^2\gamma.$$

G.

centre O′; les équations des cercles O″, O, O′ seront

(1) $$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

(2) $$(x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

(3) $$(x - \alpha)^2 + (y - 6)^2 - \rho^2 = 0;$$

et de plus on aura

(4) $$\alpha^2 + 6^2 = R^2.$$

L'axe radical des cercles (2) et (3) a pour équation, en remplaçant $\alpha^2 + 6^2$ par R^2,

(5) $$2(\alpha - d)x + 26y + d^2 + \rho^2 - r^2 - R^2 = 0.$$

La dérivée de cette dernière équation, prise par rapport à α, en considérant 6 comme une fonction de α définie par la relation (4), est

$$2x - 2\frac{\alpha}{6}y = 0,$$

ou

(6) $$6x - \alpha y = 0.$$

L'équation de l'enveloppe cherchée s'obtiendra en éliminant α, 6 entre les équations (4), (5), (6).

Pour faire cette élimination, remplaçons dans (4) et (5) 6 par sa valeur tirée de (6), et afin de simplifier l'écriture, posons

$$d^2 + \rho^2 - r^2 - R^2 = 2k^2;$$

l'équation (5) donne

$$\alpha\left(x + \frac{y^2}{x}\right) - dx + k^2 = 0,$$

et l'équation (4)

$$\alpha^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = R^2.$$

D'où les deux équations

$$\alpha\,(x^2+y^2)=x\,(dx-k^2),$$
$$\alpha^2(x^2+y^2)=x^2\,\mathrm{R}^2;$$

éliminant entre elles la variable α, il vient

$$(7)\qquad \mathrm{R}^2\,(x^2+y^2)=(dx+k^2)^2.$$

L'enveloppe cherchée est donc une conique (*).

L'équation (7) représente une ellipse ou une hyperbole suivant que le centre de la circonférence O est intérieur ou extérieur au cercle O″; et elle appartient à une parabole, quand le point O est situé sur la circonférence O″.

Note. — Une solution à peu près semblable nous a été adressée par MM Tromparent, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet); Lacauchie, élève du lycée de Strasbourg; Marcille, élève de la pension Marlié; Mirza-Nizam (lycée Saint-Louis); P.-G. de Saint-Michel, élève de M. Beynac; Marmier, élève de l'institution Sainte-Geneviève (classe du R. P. Billot); Debaune, élève de l'institution Sainte-Barbe; Moulin (la Flèche); C. Massing (institution Sainte-Barbe); Léon Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans.

M. Laisant détermine d'abord le lieu des projections du centre O″ sur les axes radicaux des cercles O, O′. Un calcul assez simple montre que ce lieu est une circonférence ayant pour centre un point situé sur la droite O″O. Et de là M. Laisant conclut que l'axe radical des cercles O, O′ enveloppe une conique dont O″ est un foyer et dont l'axe focal est O″O.

M. Doucet fait observer que, quelle que soit la courbe décrite par le centre du cercle O′, la normale à cette courbe en chaque position du centre mobile rencontre l'axe radical correspondant, au point où celui-ci touche l'enveloppe. Au moyen de cette remarque, M. Doucet résout la question proposée, sans recourir à la théorie des enveloppes.

La même remarque se trouve dans une solution géométrique donnée par M. Chabord, élève de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

(*) Cette conique a un foyer au point O″; la directrice correspondante est représentée par $x=-\frac{k^2}{d}$, et l'excentricité a pour valeur $\frac{d}{\mathrm{R}}$.

Question 689

(voir p. 61);

PAR MM. GODART ET COURTIN,
Élèves de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Étant donnés deux cercles concentriques et deux rayons quelconques, on propose de mener au cercle intérieur une tangente dont la portion comprise entre les deux rayons soit divisée en deux parties égales par le cercle extérieur.

Ce problème revient au suivant, qui est bien connu :

Construire un triangle, connaissant un angle, la médiane et la hauteur comprise dans cet angle (*).

Nous en rappellerons la solution.

Soit OAA′ le triangle cherché, OM la médiane, OH la hauteur. Dans le parallélogramme OAA′A″ construit sur OA et OA′, nous connaissons les angles, une diagonale et l'inclinaison des diagonales tirée du triangle HOM. Le parallélogramme, et par suite le triangle, est donc facile à construire.

Note. — Autres solutions de MM. Blanchin et Barrère, élèves du lycée de Lyon; Barrandon et Picquet, de Sainte-Barbe; Périer, de Lons-le-Saulnier; G. Elie, du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Question 704

(voir p. 176);

PAR M. A. SMET-JAMAR,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

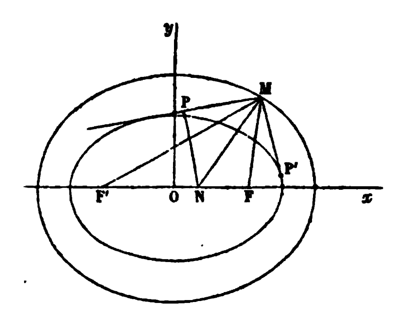
Soient C *et* C′ *deux coniques homofocales,* M *un point pris sur la première,* MN *la normale menée au*

(*) Problème proposé aux élèves de logique (sciences) au concours général en 1855. (MIRZA-NIZAM.)

point M *et terminée à l'axe focal. La grandeur de la projection de* MN *sur la tangente à* C' *menée par* M *est indépendante de la position du point* M *sur la conique.*

(GROS.)

Il faut démontrer que MP, c'est-à-dire MN cos $\overline{\text{PMN}}$,



est indépendant de la position du point M sur la conique. Soient F et F' les foyers communs aux deux coniques, a et b les axes de la conique C; a', b' ceux de C'. Désignons par ρ et ρ' les deux rayons MF, MF' et par θ l'angle PMP', nous aurons (SALMON's *Conic Sections*, 4e édition, p. 198):

$$\cos\theta = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 4a'^2}{2\rho\rho'}.$$

Pour le point M, dont les coordonnées sont x', y', on aura

$$\rho = a - \frac{cx'}{a}, \quad \rho' = a + \frac{cx'}{a}.$$

D'ailleurs, d'après un théorème connu, l'angle NMP $= \frac{\theta}{2}$. Donc

$$\overline{\text{MP}}^2 = \overline{\text{MN}}^2 \cos^2\frac{\theta}{2};$$

or

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{(\rho+\rho')^2 - 4a'^2}{4\rho\rho'} = \frac{(a^2 - a'^2)a^2}{a^4 - c^2x'^2};$$

mais on a facilement

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4};$$

donc

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \frac{a^2 - a'^2}{a^2}, \quad \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4 - c^2 x'^2}.$$

Remplaçons $a^2 y'^2$ par sa valeur $b^2(a^2 - x'^2)$ et il viendra

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a'^2),$$

quantité indépendante de la position du point M sur la conique. C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions de MM. A. L., élève de l'école Sainte-Geneviève, Lacauchie, de Saint-Prix.

Question 562 (*seconde solution*)

(voir tome XX, page 59);

PAR M. A. S.

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle pour points conjugués.

(FAURE.)

Je prends l'ellipse, par exemple : pour l'hyperbole le calcul est identique. L'ellipse étant rapportée à ses axes, les équations de trois tangentes sont

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0.$$

On sait que

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$
$$p_1^2 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\sin^2\alpha_1,$$
$$p_2^2 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\sin^2\alpha_2.$$

L'équation du cercle conjugué au triangle est

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 + \lambda_1(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1)^2 \\ &\qquad + \lambda_2(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

avec la condition

$$(1)\quad \lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2 = \lambda\sin^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha_1 + \lambda_2\sin^2\alpha_2.$$

Je ne me servirai qu'implicitement de la seconde relation (*).

La longueur de la tangente menée du centre de l'ellipse est donnée par la relation

$$t^2 = \frac{\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2}{\lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2}.$$

Or

$$\begin{aligned} &\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 \\ &= \lambda(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha) + \lambda_1(a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\sin^2\alpha_1) \\ &\qquad + \lambda_2(a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\sin^2\alpha_2) \\ &= a^2(\lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2) \\ &\qquad + b^2(\lambda\sin^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha_1 + \lambda_2\sin^2\alpha_2), \end{aligned}$$

et à cause de la relation (1),

$$\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 = (a^2 + b^2)(\lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2).$$

(*) En y ayant égard, l'équation (1) prend la forme

$$(2)\qquad x^2 + y^2 + \mu x + \nu y + (a^2 + b^2) = 0,$$

et la proposition est démontrée. L'équation (2), où μ et ν représentent des paramètres arbitraires, est l'équation générale des cercles qui coupent sous un angle droit le cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. G.

Donc enfin

$$l^2 = a^2 + b^2.$$

C'est ce que je me proposais de démontrer.

Question 694

(voir page 140);

PAR M. A. SMET-JAMAR,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

ÉNONCÉ. — *Soient n quantités* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; *si l'on pose*

$$\sum \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad \sum \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots,$$

et ainsi de suite, soient

$$f(x) = x^n + x^{n-1} \sum \alpha_1 + x^{n-2} \sum \alpha_1 \alpha_2 + \ldots,$$

et $f'(x)$ *la dérivée de* $f(x)$: *démontrer que la valeur algébrique du déterminant*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & -1 \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & -1 \ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

est $f(1) - f'(1)$. (MICHAEL ROBERTS.)

Solution. — Formons d'abord la quantité $f(1) - f'(1)$. Elle sera évidemment égale à

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n - \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} - 2 \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-3} - \ldots$$
$$- (n-2) \sum \alpha_1 - (n-1).$$

Cela posé, désignons par P le déterminant proposé; nous pourrons le décomposer en une somme de déterminants dans lesquels les éléments principaux seront nuls, chacun de ces déterminants successifs étant du $n^{ième}$, du $(n-1)^{ième}$ ordre, et ainsi de suite (*voir* Brioschi, *Théorie des déterminants*, traduction Combescure, p. 66).

Nous aurons ainsi

$$P = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & 0 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & -1 & 0 \ \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 \ldots & 0 \end{vmatrix} + \sum \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & 0 \ \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \sum \alpha_1 \alpha_2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & 0 \ \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Maintenant il est évident que ces déterminants successifs ont pour valeurs

$$-(n-1), \quad -(n-2), \quad -(n-3), \ldots -1;$$

de sorte que l'égalité précédente devient

$$P = -(n-1) - \sum \alpha_1 (n-2) - \sum \alpha_1 \alpha_2 (n-3) \ldots$$
$$- \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

c'est-à-dire précisément $f(1) - f'(1)$. C. Q. F. D.

Même question;

PAR MM. MAX CORNU ET H. PICQUET,
Élèves en Mathématiques spéciales à l'institution Sainte-Barbe
(classe de M. Moutard).

$f(x)=0$ est l'équation qui a pour racines $-\alpha_1$, $-\alpha_2,\ldots, -\alpha_n$, et on peut l'écrire

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n)=0;$$

d'ailleurs

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha_1}{x+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{x+\alpha_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x+\alpha_n}.$$

Il faut faire voir que le déterminant a pour valeur algébrique

$$f(1)-f'(1) \quad \text{ou} \quad f(1)\left[1-\frac{f'(1)}{f(1)}\right]$$

ou

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$
$$\times\left[1-\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}-\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}-\ldots-\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\right].$$

Écrivons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & -1\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & -1\ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

et retranchons la dernière colonne de toutes les autres; il vient

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+1 & 0 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 1+\alpha_2 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0 & 1+\alpha_3 & 0\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(1+\alpha_n) & -(1+\alpha_n) & -(1+\alpha_n)\ldots & & \alpha_n \end{vmatrix}$$

qu'on peut écrire

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_{n-1})$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1+\alpha_n}{1+\alpha_1} & -\frac{1+\alpha_n}{1+\alpha_2}\ldots & & & \alpha_n+1-1 \end{vmatrix}$$

ou, en divisant la dernière rangée par $1+\alpha_n$,

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{1+\alpha_1} & -\frac{1}{1+\alpha_2}\ldots & & & 1-\frac{1}{1+\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Ajoutons successivement chacune des colonnes à la dernière, nous aurons

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{1+\alpha_1} & -\frac{1}{1+\alpha_2} & -\frac{1}{1+\alpha_3}\ldots & & 1-\frac{1}{1+\alpha_1}-\frac{1}{1+\alpha_2}-\ldots-\frac{1}{1+\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Enfin, si l'on développe en ordonnant par rapport aux

termes de la dernière colonne, on a tout de suite

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$
$$\times\left[1-\frac{1}{1+\alpha_1}-\frac{1}{1+\alpha_2}-\ldots-\frac{1}{1+\alpha_n}\right].$$

C. Q. F. D.

Note. — Des solutions peu différentes ont été données par MM. J. Courtin et C. Godart, élèves de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Moutard), et par M. A. Rezzonico.

Question 695

(voir p. 140);

PAR M. JAUFROID,
Professeur de Mathématiques au lycée de Vendôme.

ÉNONCÉ. — *Si on a*

(1) $$a_1^2 - a_0 a_2 < 0,$$

(2) $$a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 > 0,$$

les racines de l'équation

(3) $$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

sont toutes imaginaires, et, sous les mêmes conditions, l'équation

(4) $$a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + 10a_3 x^2 + 5a_4 x + a_5 = 0$$

n'a qu'une racine réelle.

Solution. — Comme on peut supposer $a_0 > 0$, la condition (1) donne

$$a_2 > 0.$$

Le premier membre de (2) étant ordonné par rapport à a_3, il faut que les racines du trinôme ainsi obtenu et

égalé à zéro soient réelles, ce qui conduit à

$$(a_1^2 - a_0 a_2)(a_2^2 - a_0 a_4) > 0;$$

donc

$$(5)\qquad a_2^2 - a_0 a_4 < 0.$$

Cela posé, multipliant tous les termes de l'équation (3) par a_0, on peut regarder $a_0^2 x^4 + 4a_0 a_1 x^3$ comme les deux premiers termes du carré de $a_0 x^2 + 2a_2 x + a_2$.

Ajoutant et retranchant les termes qui manquent pour avoir ce carré, l'équation se met sous la forme

$$(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)^2 + 4(a_2 a_0 - a_1^2) x^2 + 4(a_0 a_3 - a_1 a_2) x \\ + a_0 a_4 - a_2^2 = 0.$$

En vertu de (1) le premier carré ne peut devenir nul pour aucune valeur réelle de x; pour le trinôme du second degré qui le suit, son premier terme et son dernier terme sont positifs, et de plus on a

$$(6)\qquad (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - (a_2 a_0 - a_1^2)(a_0 a_4 - a_2^2) < 0,$$

car cette inégalité développée se réduit à l'inégalité (2) (*). Ce trinôme restera donc continuellement positif pour toute valeur réelle de x; il suit de là que le premier membre de l'équation proposée reste aussi toujours positif pour les mêmes valeurs de x, et, par suite, que les racines de cette équation sont imaginaires.

Le premier membre de l'équation (3) étant, au facteur positif 5 près, la dérivée du premier membre de l'équation (4), il résulte de ce qui précède que ce dernier va en augmentant quand x varie de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, et

(*) Cette réduction de l'inégalité (6) à l'inégalité (2) montre qu'il n'était pas nécessaire d'établir d'abord l'inégalité (5); en supprimant ce qui en a été dit, on simplifie d'autant la démonstration de la proposition énoncée. G.

comme alors il passe du négatif au positif, il ne s'annule qu'une seule fois, c'est-à-dire que l'équation (4) n'a qu'une racine réelle.

Question 387

(voir tome XVI, page 183);

PAR LE DOCTEUR JOSEPH MARTELLI.

D'après la méthode de Lagrange, on résout l'équation générale du quatrième degré en prenant une résolvante dont la racine soit une fonction linéaire des racines de l'équation proposée ayant six valeurs égales deux à deux et de signes contraires.

Soit

$$y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4;$$

cette fonction, qui a six valeurs, dépendra d'une équation du sixième degré; mais puisque ces valeurs de y sont égales deux à deux et de signes contraires, l'équation en y s'abaissera au troisième degré en posant

$$y^2 = \theta.$$

Étant connue la composition des racines de l'équation en y, on peut la former directement, et on obtient

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} &\theta^3 - \frac{48}{a^2}(b^2 - ac)\theta^2 + \frac{64}{a^4}(12b^4 - 24ab^2c + 9a^2c^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 4a^2bd - a^3e)\theta \\ &- \frac{1024}{a^6}(2b^3 - 3abc + a^2d)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

En éliminant de cette équation le second terme d'après la méthode ordinaire, c'est-à-dire en posant

$$\theta = \omega + \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

on a

$$(b)\quad \begin{cases} \omega^3 - \dfrac{64}{a^2}(ae - 4bd + 3c^2)\,\omega \\ + \dfrac{1024}{a^3}(ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3) = 0; \end{cases}$$

et puisque

$$ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3 = 0,$$

la précédente équation (b) se réduit à la suivante

$$\omega^3 - \frac{64}{a^2}(ae - 4bd + 3c^2)\,\omega = 0,$$

dont les racines sont

$$\omega_1 = 0,$$

$$\omega_2 = \frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2}, \quad \omega_3 = -\frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2}.$$

On obtient donc, en indiquant par θ_1, θ_2, θ_3 les racines de l'équation (a),

$$\theta_1 = \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

$$\theta_2 = \frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2} + \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

$$\theta_3 = -\frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2} + \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

et aussi

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{\theta_1},$$

$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = \sqrt{\theta_2},$$

$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = \sqrt{\theta_3},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4b}{a}.$$

Ces dernières équations donnent les valeurs suivantes

des racines de l'équation proposée :

$$x_1 = \frac{-4b + a(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

$$x_2 = \frac{-4b + a(\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

$$x_3 = \frac{-4b + a(-\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

$$x_4 = \frac{-4b + a(-\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

lesquelles, par les précédentes valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, évidemment ne contiennent pas de radical cubique.

Note. — Il est très-facile de remarquer la coïncidence des valeurs trouvées avec les valeurs données sans démonstration par M. Eisenstein dans le tome XXVII du *Journal de Crelle*.

EXERCICES SUR LA RECTIFICATION DES COURBES PLANES;

PAR M. E. PROUHET.

FORMULE POUR LA RECTIFICATION DES ARCS DE COURBE PLANE.

1. Soient AB une courbe plane, O un point pris dans son plan, OP une perpendiculaire à la tangente menée à la courbe AB par un de ses points M : *La normale à la courbe, lieu des points* P, *s'obtient en joignant le point* P *au milieu de la droite* OM.

2. *Si l'on désigne par p la perpendiculaire* OP *et par* ω *l'angle que cette droite fait avec un axe fixe, on aura*

$$\text{PM} = \pm \frac{dp}{d\omega}.$$

Cela résulte de ce que PM est égale à la sous-normale de la po-

daire (c'est ainsi qu'on nomme le lieu des points P), quand on considère p et ω comme des coordonnées polaires.

3. *Si du point* O *on abaisse une perpendiculaire* OQ *sur la normale* CM *à la courbe* AB, C *étant le centre de courbure, on aura*

$$CQ = \pm \frac{d^2 p}{d\omega^2},$$

car le point Q appartient à la podaire de la développée de la courbe AB.

4. *Si l'on désigne l'arc* AB *par* s, *et par* α *et* β *les angles que les normales aux points* A *et* B *font avec un axe fixe, on aura*

$$\text{(I)} \qquad s = \int_\alpha^\beta p\,d\omega + \left(\frac{dp}{d\omega}\right)_\beta - \left(\frac{dp}{d\omega}\right)_\alpha.$$

En effet, ρ étant le rayon de courbure, on a

$$s = \int_\alpha^\beta \rho\,d\omega = \int_\alpha^\beta (OP \pm CQ)\,d\omega = \int_\alpha^\beta \left(p + \frac{d^2 p}{d\omega^2}\right) d\omega.$$

5. *Quand le point* O *est le point de concours des normales extrêmes et plus généralement quand les extrémités de l'arc* AB *sont également distantes des points correspondants de la podaire, on a*

$$\text{(II)} \qquad s = \int_\alpha^\beta p\,d\omega.$$

Conséquence de (2) et de (4).

6. *La formule* (I) *ne change pas quand on change* p *en*

$$p + a\cos\omega + b\sin\omega.$$

Analytiquement cela résulte de ce que

$$z = a\cos\omega + b\sin\omega$$

est l'intégrale générale de l'équation

$$z + \frac{d^2 z}{d\omega^2} = 0;$$

géométriquement cette transformation revient à déplacer le point O d'où l'on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à la courbe.

APPROXIMATION DES ARCS DE COURBE.

7. *Soient* AB *un arc convexe,* O *un point pris dans la concavité de cette courbe,* ϖ *l'angle des normales extrêmes, en désignant par* $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ *les rayons de courbure qui font avec la normale au point* A *les angles* $0, \frac{\varpi}{2n}, \frac{2\varpi}{2n}, \frac{3\varpi}{2n}, \ldots,$ *on aura*

$$AB > \varpi \frac{\frac{1}{2}\rho_0 + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \frac{1}{2}\rho_{2n}}{n},$$

$$AB < \varpi \frac{\rho_1 + \rho_3 + \ldots + \rho_{2n-1}}{n},$$

si d'ailleurs $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ *est négatif pour les valeurs de* ω *comprises entre* o *et* ϖ.

Ces deux inégalités résultent de ce que $\int \rho\, d\omega$ peut être considérée comme l'aire d'une courbe convexe dont ρ et ω seraient les coordonnées rectangulaires.

8. *Si* O *est le point de concours des normales extrêmes, et* $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ *les perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un polygone équiangle circonscrit à la courbe* AB, *on aura*

$$AB = \lim \varpi \frac{\frac{1}{2}p_0 + p_2 + p_4 + \ldots + \frac{1}{2}p_{2n}}{n} \quad \text{pour } n = \infty,$$

$$AB = \lim \varpi \frac{p_1 + p_3 + \ldots + p_{2n-1}}{n} \qquad \text{pour } n = \infty.$$

9. *Soit* CD *une droite partagée au point* E *en deux segments,* $CE = a$, $CD = b$. *Si l'on partage en* $2n$ *parties égales la demi-circonférence décrite sur* CD *comme diamètre et que l'on désigne par* $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$, *les droites menées du point* E *aux divers points de division, le périmètre de l'ellipse ayant* $2a$ *et* $2b$ *pour axes sera compris entre deux circonférences ayant pour rayons la première*

$$\frac{\frac{1}{2}p_0 + p_2 + p_4 + \ldots + \frac{1}{2}p_{2n}}{n}$$

et la seconde

$$\frac{p_1 + p_3 + \ldots + p_{2n-1}}{n}.$$

Le théorème aurait encore lieu si le point E était pris sur le prolongement de CD et que l'on eût encore $EC = a$, $ED = b$.

10. *La moyenne des distances d'un point pris dans le plan d'un cercle, aux sommets d'un polygone régulier d'une infinité de côtés inscrits dans le cercle, est égale au périmètre d'une ellipse ayant pour demi-axes la plus grande et la plus courte distance du point à la circonférence, divisé par 2π. — Cas où le point est pris sur la circonférence.*

Conséquence de (9).

11. *Le périmètre d'une ellipse ayant pour axes $2a$ et $2b$, $a>b$, étant désigné par* E, *on a*

$$E > 2\pi b, \qquad E < 2\pi a$$

$$E > 2\pi\cdot\frac{a+b}{2}, \qquad E < 2\pi\cdot\frac{\sqrt{2a^2+2b^2}}{2},$$

$$E > 2\pi\cdot\frac{a+b+\sqrt{2a^2+2b^2}}{4}, \quad E < 2\pi\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{2}\sqrt{2a^4+12a^2b^2+2b^4}}}{2}.$$

....

Conséquence de (9).

TRANSFORMATION DES ARCS DE COURBE.

12. Si AB et A'B' sont deux droites parallèles, et a, b, des points pris sur les droites AA', BB', de telle sorte que

$$\frac{Aa}{A'a} = \frac{Bb}{B'b} = \frac{m}{n},$$

on aura

$$ab = \frac{n\,AB \pm m\,A'B'}{m+n}.$$

On prendra le signe + si les droites AB, A'B' sont dirigées dans le même sens, et le signe — dans le cas contraire.

13. *Si plusieurs polygones* ABCD..., A'B'C'D'..., A"B"C"D"..., *ont leurs côtés respectivement parallèles, si a est le centre de gravité des sommets homologues* A, A', A",...; *b celui des sommets* B, B', B",..., *et ainsi de suite, le polygone $abcd$... aura ses côtés parallèles à ceux des premiers polygones, et son périmètre sera égal à la moyenne arithmétique des périmètres des polygones proposés.*

Se démontrera d'abord pour deux polygones, puis pour trois, et ainsi de suite, au moyen du théorème 12.

14. Soient C, C', C",... plusieurs courbes, A, A', A",... des points appartenant respectivement à ces courbes et tels, que les tangentes

en ces points soient parallèles. Soit a le centre de gravité des points A, A′, A″,... considérés comme des points matériels de poids égaux. *Si les points* A, A′,... *se meuvent sur leurs courbes respectives en remplissant toujours les conditions précédentes, l'arc de courbe décrit par le point a sera égal à la moyenne arithmétique des arcs décrits par les points* A, A′,..., *en prenant avec le même signe les arcs décrits dans le même sens.*

15. *Étant donné un arc* AB, *le transformer en un arc d'espèce différente et de même longueur.*

Soient OA et OB les normales menées aux extrémités de l'arc AB. Soit A′B′ ce que devient AB quand on fait tourner la figure autour de la bissectrice OC de l'angle AOB. En appliquant le théorème 14, on aura une courbe ab égale à la demi-somme des arcs AB et A′B′, et par conséquent égale à chacun de ces arcs.

La courbe ab est symétrique par rapport à OC. En doublant les dimensions d'une de ses moitiés sans changer sa forme, on aura une courbe $a'c'$ de même longueur que AB, mais dont les normales extrêmes feront un angle égal à la moitié de l'angle AOB.

En opérant sur $a'c'$ comme sur AB et répétant indéfiniment cette suite d'opérations, on transformera l'arc primitif en arcs de même longueur dont les normales extrêmes feront un angle de plus en plus petit et qui, par conséquent, différeront de moins en moins d'une ligne droite.

16. Dans la transformation précédente, on a changé un arc AB en un autre arc de même ouverture ou d'une ouverture moitié moindre, c'est-à-dire dans lequel les normales extrêmes faisaient le même angle ou un angle moitié moindre. Soit ϖ l'ouverture d'un certain arc AB, posons $p=f(\omega)$: on a

$$s=\int_0^{\varpi}[f(\omega)+f''(\omega)]\,d\omega.$$

On aurait encore

$$s=\alpha\int_0^{\frac{\varpi}{\alpha}}[f(\alpha\omega)+f''(\alpha\omega)]\,d\omega.$$

Soit $p_1=f_1(\omega)$ l'équation de la podaire d'une certaine courbe dont l'arc serait représenté par la formule précédente : on doit avoir

$$f_1(\omega)+f''_1(\omega)=f(\alpha\omega)+f''(\alpha\omega).$$

La fonction f_1 est donc donnée par une équation différentielle linéaire du second ordre, en général difficile à intégrer.

COURBES RECTIFIABLES.

17. *Trouver une courbe, connaissant sa podaire.*

Si $p = f(\omega)$ est l'équation de la podaire, r le rayon vecteur de la courbe cherchée et θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe fixe auquel la podaire est rapportée, il faudra éliminer ω entre les deux équations

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega) = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\omega}, \quad r^2 = p^2 + \frac{dp^2}{d\omega^2}.$$

18. *Si l'on prend $f(\omega)$ égal à la dérivée d'une certaine fonction $F(\omega)$, l'élimination précédente donnera une équation*

$$\varphi(r, \theta) = 0,$$

qui représentera une courbe rectifiable.

19. *On obtiendra encore une courbe rectifiable si l'on trouve une fonction M de x telle, que l'on puisse trouver en termes finis les intégrales*

$$\int M\,dx, \quad \int \frac{1}{M}\,dx.$$

Il suffira de poser

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{M} - \frac{1}{2}\int M\,dx.$$

En prenant M de la forme $M = ax^n$, on aura une courbe algébrique. Si M est une fraction algébrique rationnelle, la rectification de la courbe dépendra généralement des arcs de cercle et des logarithmes.

PRIX PROPOSÉS PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BERLIN.

I.

Prix Steiner de Géométrie synthétique.

Dans un Mémoire publié dans le cahier de janvier 1856 des *Comptes rendus mensuels de l'Académie* et dans

le 53ᵉ volume du *Journal de Mathématiques*, Steiner a fait connaître plusieurs propriétés fondamentales des surfaces de troisième ordre, qui forment la base d'une théorie géométrique de ces surfaces. L'Académie, désirant voir ce beau travail du grand géomètre continué d'après sa propre méthode, propose pour sujet de prix la question suivante :

Compléter et perfectionner dans quelques points essentiels la théorie des surfaces de troisième ordre, en faisant usage de la méthode synthétique.

Il faudra pour cela :

1° Démontrer les théorèmes qui, dans le Mémoire cité, ne se trouvent souvent qu'énoncés.

2° Étendre la recherche aux cas, non traités par Steiner, dans lesquels quelques-uns des éléments nécessaires pour la construction des surfaces en question cessent d'être réels.

Il serait, en outre, à souhaiter qu'on s'appliquât à déterminer les courbes formées par l'intersection de deux de ces surfaces, et à en discuter les différentes espèces, pour ajouter ainsi un chapitre important au travail de Steiner.

Les Mémoires, qui, au gré de l'auteur, pourront être rédigés en allemand, en latin ou en français, devront être remis au secrétariat de l'Académie avant le 1ᵉʳ mars 1866. Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, munis d'une épigraphe correspondante à celle des Mémoires. Le prix de 600 thalers (2250 francs) sera décerné dans la séance publique consacrée à la mémoire de Leibnitz en juillet 1866.

II.

Prix de Mathématiques.

Déjà dans presque toutes les branches des Mathématiques la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes a

fourni la solution définitive de problèmes qui, dans l'état antérieur de l'analyse, n'en étaient pas susceptibles. Comme on est en droit de penser que cette théorie se prêtera encore à beaucoup d'applications nouvelles, l'Académie propose la question suivante :

Résoudre, au moyen des transcendantes elliptiques ou abéliennes, un problème important quelconque dont le sujet pourra être choisi dans l'Algèbre, la théorie des nombres, le calcul intégral, la Géométrie, la Mécanique ou la Physique mathématique.

Les Mémoires, qui, au gré de l'auteur, pourront être rédigés en allemand, en latin ou en français, devront être remis au secrétariat de l'Académie avant le 1er mars 1867. Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, munis d'une épigraphe correspondante à celle des Mémoires. Le prix de 100 ducats (1187 francs) sera décerné dans la séance publique consacrée à la mémoire de Leibnitz en juillet 1867.

(*Communiqué par l'Académie des Sciences de Berlin.*)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1864).

Composition mathématique.

On donne le cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2=1,$$

et la parabole représentée par l'équation

$$6^2x^2-2\alpha 6xy+\alpha^2y^2+2\alpha x+26y=\frac{3\alpha^2+6^2-1}{\alpha^2},$$

où α, 6 sont des paramètres positifs quelconques.

On propose de déterminer :

1° Le nombre des points *réels* communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de α et de β;

2° Les coordonnées des quatre points communs, lorsque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; lorsque $\alpha = 1$ avec $\beta > 0$; lorsque $\beta = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)}$.

Composition de Trigonométrie.

Étant donnés dans un triangle rectiligne deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, savoir :

$$a = 23824^{m},52,$$
$$b = 15642^{m},34,$$
$$C = 84^{\circ}\,32'\,18'',4,$$

calculer les deux autres angles A et B, et le troisième côté c.

Composition de Géométrie descriptive.

Le problème consiste à représenter la surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour d'une droite située hors du plan de cette courbe.

L'axe de révolution est la droite verticale (O, O′Z) (*). L'ellipse génératrice est donnée dans sa position initiale par ses projections (ABCD, M′N′) et par les traces LG, GH de son plan ; ce plan est perpendiculaire au plan vertical.

Le grand axe de l'ellipse ABCD passe par la trace horizontale O de l'axe de révolution.

On tracera le contour apparent de la surface sur chacun des plans de projection. Les deux courbes méridiennes situées dans le plan vertical OL seront entièrement con-

(*) On est prié de faire la figure.

struites, et on distinguera par la ponctuation celles de leurs parties qui sont vues de celles qui sont cachées.

$$\text{Ellipse ABCD}\left\{\begin{array}{l}\text{grand axe AC} = 90^{mm}\\ \text{petit axe BD} = 44\end{array}\right.$$

$$OO' = 72^{mm},\quad OL = 68^{mm},\quad OI\,(*) = 15^{mm},$$

$$\widehat{AOL} = 45°,\quad \widehat{YGH} = 50°.$$

La droite OL est parallèle à la ligne de terre.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1864).

Composition mathématique.

Étant donnés un triangle ABC et une droite AD passant par le point A, il y a une infinité de courbes du second degré passant par les trois points A, B, C, et tangentes à la droite AD. A chacune de ces courbes on mène des tangentes parallèles à AD. Trouver le lieu géométrique des points de contact. On reconnaîtra que ce lieu est lui-même une courbe du second degré, et on cherchera le lieu des positions successives qu'occuperont ses foyers, lorsque les points A, B, C restant fixes, la droite AD vient à tourner autour du point A.

(*) Le point I est le centre de l'ellipse ABCD.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Session de juillet 1864.)

COMPOSITION DES 1er ET 2 JUILLET 1864.

Problème d'Analyse.

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$[4n^2y - 3nx - 3nf(z) + f'(z)]\frac{dz}{dx}$$
$$+ [(ny - z - f(z)]\frac{dz}{dy} + 1 = 0.$$

$\Big($$n$ est une constante donnée, $f(z)$ une fonction continue de z; $f'(z)$ représente la dérivée $\dfrac{df(z)}{dz}$.$\Big)$

Problème de Mécanique.

Un plan mobile AOB tourne uniformément autour de l'axe fixe OA : trouver le mouvement d'un point matériel M assujetti à rester dans ce plan, et attiré par le point O de l'axe proportionnellement à la distance OM.

On fera abstraction de la pesanteur.

On construira la trajectoire (sur le plan mobile) dans le cas particulier où la vitesse angulaire ω de la rotation du plan, et l'attraction μ du centre fixe sur l'unité de masse à l'unité de distance, vérifieraient l'équation

$$\omega^2 = \frac{3}{4}\mu,$$

et où de plus, à l'origine du temps, le point mobile se-

rait situé sur la droite OB perpendiculaire à l'axe OA, et animé, dans le plan AOB, d'une vitesse parallèle à cet axe.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Peaucellier, capitaine du Génie (à Nice).

« J'ai l'honneur de soumettre à vos lecteurs les questions suivantes qui me semblent présenter de l'intérêt à divers égards.

» J'appelle *compas composé* un assemblage de leviers articulés, susceptibles d'un mouvement défini. Tel est, par exemple, un quadrilatère articulé à ses sommets, l'un des côtés étant fixe.

» Le parallélogramme articulé de Watt, certains instruments de précision, comme le pantographe, le planimètre polaire, etc., sont dans le même cas.

» Le compas à verge, se réduisant à un levier mobile autour d'une de ses extrémités, sera le cas le plus simple du compas composé.

» Cela étant, on propose de trouver des compas composés propres à décrire d'une manière continue :

» 1° La ligne droite;

» 2° Le cercle, quelque grand que soit son rayon;

» 3° Les coniques.

» Le mode de construction de ce genre de compas supprimant tout mouvement de glissement, le tracé des courbes précitées est susceptible d'une extrême précision. Le cas de la ligne droite est curieux en ce qu'il offre une

solution rigoureuse du problème résolu d'une manière approchée par le parallélogramme de Watt. »

Un abonné nous écrit qu'il serait utile de donner des définitions, *claires* et précises, de *tous* les nouveaux termes employés dans les nouvelles méthodes. Nous n'en contestons pas l'opportunité; seulement, nous ferons observer à notre abonné que le vocabulaire qu'il demande serait trop volumineux pour trouver place dans les *Annales*. Le nombre des mots nouveaux est déjà considérable, il surpasse de beaucoup celui des idées nouvelles, et notez qu'il va toujours en augmentant. A peine a-t-on fait connaissance avec les *hyperdéterminants*, les *évectants de discriminants*, les *covariants*, les *contravariants*, etc., que voici venir des *fact-invariants*. (*Voir les Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, n° du 13 juin 1864.) Les *fact-invariants* forment une nouvelle classe d'*invariants* appartenant à l'ordre des *combinants*; pour en avoir une notion plus claire, il suffira de lire les quelques lignes suivantes qui sont extraites des *Comptes rendus*.

Deux surfaces se coupent suivant une courbe qui, en général, ne présente aucune singularité.

« Mais il peut arriver que cette courbe possède un » point double, dans lequel cas les deux surfaces seront » touchées par le même plan. Pour que cela arrive, une » certaine fonction des coefficients doit s'évanouir, à la- » quelle, comme exprimant la condition de tangence, » notre grand géomètre M. Cayley a proposé de donner » le nom de *fact-invariant*. »

G.

Un lecteur anonyme des *Nouvelles Annales* nous a récemment adressé une démonstration relative à la ques-

tion 664. La solution qu'on a donnée de cette question (p. 175, numéro d'avril dernier) est incomplète. Les démonstrations mentionnées (p. 175) s'appuient, comme celle du lecteur anonyme, sur des méthodes de calculs exposées dans le *Traité des Sections coniques* de M. G. Salmon. Les applications les plus simples qu'on puisse faire de ces méthodes à la question dont il s'agit, ont été faites par l'auteur même du *Traité des Sections coniques*. (*Voir* 4e édition, p. 244 et 335.) G.

NOTICE SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET SUR QUELQUES TABLES DE CES FONCTIONS;

PAR M. HOÜEL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

1. D'après leur définition géométrique, le cosinus et le sinus d'un angle sont les coordonnées rectangles du point correspondant d'une circonférence décrite du sommet de l'angle comme centre, avec l'unité pour rayon. L'équation de ce cercle peut être remplacée par les deux équations

(1) $$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

les fonctions $\cos t$, $\sin t$ satisfaisant à la relation fondamentale

(2) $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

On peut remarquer que le nombre t, qui mesure l'angle évalué en parties du rayon, mesure en même temps le double de l'aire du secteur circulaire correspondant, de sorte que l'on peut considérer, au lieu de l'angle, le double du secteur compris entre ses côtés.

On a très-anciennement aperçu l'analogie qui existe entre le cercle et l'hyperbole équilatère, et la considération des secteurs hyperboliques est devenue importante depuis que Mercator a découvert leur expression au moyen des logarithmes (*Logarithmotechnia*, 1668). En traitant la multiplication des aires hyperboliques, Moivre (*) a trouvé, entre les ordonnées y et y_n des points d'une hyperbole de demi-axe $= 1$ correspondants à des secteurs dont le second est égal à n fois le premier, la relation

$$(3) \qquad \sqrt{1+y_n^2}+y_n = \left(\sqrt{1+y^2}+y\right)^n,$$

qui se déduit immédiatement de l'expression logarithmique du double secteur hyperbolique,

$$(4) \qquad u = \log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right) = \log\frac{1}{\sqrt{1+y^2}-y},$$

ou, si l'on veut, en ayant égard à l'équation de l'hyperbole,

$$(5) \qquad x^2 - y^2 = 1,$$

$$(6) \qquad u = \log(x+y) = \log\frac{1}{x-y}.$$

L'équation du cercle se déduisant de celle de l'hyperbole (**) par le changement de y en $\pm y\sqrt{-1}$, Moivre en conclut que la relation qui existe entre les ordonnées des points du cercle qui correspondent à des secteurs dont l'un est égal à n fois l'autre, est de la forme

$$\sqrt{1-y_n^2}\pm y_n\sqrt{-1} = \left(\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{-1}\right)^n,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos nt \pm \sqrt{-1}\sin nt = \left(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t\right)^n,$$

(*) *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, 1730.

(**) Il est entendu qu'il s'agira toujours ici de l'hyperbole *équilatère*.

C'est ainsi qu'il est parvenu au théorème fondamental qui porte son nom.

En comparant les développements en série des fonctions exponentielles et circulaires, on arrive à la formule

$$e^{\pm t\sqrt{-1}} = \cos t \pm \sqrt{-1}\sin t,$$

d'où l'on tire.

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \cos t = \dfrac{e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}}{2}, \\ y = \sin t = \dfrac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Ces formules expriment les coordonnées du cercle en fonction d'exponentielles imaginaires ayant pour exposant le double secteur circulaire.

Or, des équations (4) ou (6) on tire, pour les coordonnées de l'hyperbole, exprimées en fonction du double secteur hyperbolique, les valeurs

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2}, \\ y = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{2}, \end{cases}$$

qui ne diffèrent des formules (7) que par le changement de t en $u\sqrt{-1}$, et de y en $y\sqrt{-1}$. On peut donc représenter les coordonnées de l'hyperbole par les formules

$$(9)\qquad x = \cos\left(u\sqrt{-1}\right), \quad y = \frac{\sin\left(u\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{-1}}.$$

De même que toutes les formules de la Trigonométrie relatives à l'addition, à la multiplication et à la division des arcs ou des secteurs circulaires peuvent se déduire en traitant par l'Algèbre les formules (7), de même toutes les formules analogues relatives aux secteurs hyperbo-

liques pourront se déduire, soit directement, des formules (8), soit immédiatement, des formules relatives aux arcs ou aux secteurs circulaires, en remplaçant partout

$$t,\quad x = \cos t,\quad y = \sin t$$

respectivement par

$$u\sqrt{-1},\quad x = \cos(u\sqrt{-1}),\quad y\sqrt{-1} = \sin(u\sqrt{-1}).$$

2. Il était naturel de songer à désigner les coordonnées de l'hyperbole par une notation qui rappelât l'analogie de leurs propriétés avec les coordonnées $\cos t$, $\sin t$ du cercle. Cette idée a été réalisée pour la première fois par Friedr. Mayer, de l'Académie de Pétersbourg, un des contemporains de Moivre. Dans le courant du siècle dernier, Vincent Riccati, Saladini, Foncenex et surtout Lambert se sont occupés de ces fonctions, et ce dernier en a donné une petite Table dans le recueil qu'il a publié en 1770 (*). Les propriétés de ces fonctions se trouvent aussi exposées dans le *Cours de Mathématiques* de Sauvi (1776), t. IV, p. 222 et suiv., et dans le *Dictionnaire mathématique*, art. Géométrie, t. II, p. 592 (1805).

Dans ces dernières années, Gudermann a fait paraître dans le *Journal de Crelle* (t. VI et suiv.) un long travail sur les *fonctions hyperboliques*, suivi de tables étendues, et qui a été réuni en un volume sous le titre de : *Theorie der potenzial- oder cyclisch-hyperbolischen Functionen* (Berlin, 1833, 1 vol. in-4, 158 pages de texte, 196 de Tables).

Enfin deux nouveaux recueils de Tables de fonctions hyperboliques viennent d'être publiés, en 1863, l'un à Dantzig par M. Gronau, l'autre à Pise par M. Angelo Forti.

(*) *Voyez* le Bulletin de bibliographie des *Nouvelles Annales*, année 1855, p. 28.

Avant de décrire ces diverses Tables, disons quelques mots sur les notations adoptées pour représenter les fonctions hyperboliques.

3. On a désigné depuis longtemps les coordonnées de l'hyperbole, données par les formules (8), sous le nom de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique*, et on les a représentées, en abrégeant plus ou moins la notation, par les initiales des mots *cosinus* et *sinus*, suivies de la lettre h. Nous écrirons de cette manière

$$x = \mathrm{Ch}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$y = \mathrm{Sh}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

en y joignant, par analogie avec la *tangente circulaire*, la *tangente hyperbolique*

$$\mathrm{Th}\, u = \frac{\mathrm{Sh}\, u}{\mathrm{Ch}\, u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

D'après cette notation, les formules (9) deviennent

$$\mathrm{Ch}\, u = \cos(u\sqrt{-1}), \quad \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\, u = \sin(u\sqrt{-1}),$$

d'où

$$\sqrt{-1}\,\mathrm{Th}\, u = \mathrm{tang}(u\sqrt{-1}).$$

On en tire, réciproquement,

$$\cos t = \mathrm{Ch}(t\sqrt{-1}), \quad \sqrt{-1}\sin t = \mathrm{Sh}(t\sqrt{-1}),$$

$$\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\, t = \mathrm{Th}(t\sqrt{-1}).$$

Telles sont les relations qui lient entre elles les fonctions hyperboliques et circulaires.

En les comparant aux formules d'Abel et de Jacobi pour le passage des arguments réels aux arguments imaginaires dans la théorie des fonctions elliptiques, on voit qu'elles sont un cas particulier des formules qui servent à exprimer les fonctions elliptiques d'un argument ima-

ginaire au moyen des fonctions d'un argument réel relatives au module complémentaire, les fonctions circulaires et hyperboliques correspondant aux modules complémentaires o et 1.

De cette remarque résulte immédiatement la représentation des fonctions hyperboliques au moyen des fonctions circulaires d'un arc lié à l'argument u comme l'est plus généralement l'amplitude à l'argument d'une fonction elliptique. Nous désignerons cette amplitude, relative au module 1, sous le nom d'*amplitude hyperbolique* de l'argument u, et nous la représenterons par le signe $\mathrm{Amh}\,u$.

Soit que l'on particularise les formules relatives aux fonctions elliptiques, soit que l'on compare la relation

$$\mathrm{Ch}^2 u - \mathrm{Sh}^2 u = 1,$$

qui a lieu entre les fonctions hyperboliques, à la relation

$$\mathrm{séc}^2\tau - \mathrm{tang}^2\tau = 1,$$

qui a lieu entre les fonctions circulaires, on est conduit à identifier les fonctions hyperboliques de u avec les fonctions circulaires d'un certain angle τ, lié à u par les relations

$$\mathrm{Ch}\,u = \mathrm{séc}\,\tau, \quad \mathrm{Sh}\,u = \mathrm{tang}\,\tau, \quad \mathrm{Th}\,u = \sin\tau,$$

dont chacune entraîne les deux autres. C'est cet angle τ que nous appellerons l'*amplitude hyperbolique* de u,

$$\tau = \mathrm{Amh}\,u.$$

Gudermann désigne cet angle sous le nom de *longitude* (*longitudo, Longitudinalzahl*), et le représente par la notation

$$\tau = lu \quad (^*).$$

(*) Lambert et, d'après lui, MM. Mossotti et Forti ont nommé cet angle τ l'*angle transcendant* correspondant au double secteur hyperbolique u. Il est très-facile d'avoir la représentation géométrique de cet angle dans l'hyperbole.

Réciproquement, il désigne l'argument u, considéré comme fonction de τ, sous le nom de *longueur* (*Länge*, *Längezahl*), et le représente par la caractéristique $\mathfrak{L}$,

$$u = \mathfrak{L}\tau.$$

En résolvant l'une des équations

$$\text{séc}\,\tau = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \text{tang}\,\tau = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \sin\tau = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

par rapport à u, on trouve la relation qui existe entre les deux variables u et τ,

$$u = l.\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right),$$

d'où, réciproquement,

$$\tau = \text{Amh}\,u = 2\,\text{arc tang}\,e^u - \frac{\pi}{2}.$$

On obtient toutes les valeurs réelles de l'argument u, de $-\infty$ à $+\infty$, en faisant varier l'amplitude τ depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

4. Donnons maintenant une idée des Tables de Gudermann et de celles de M. Gronau qui ne diffèrent des premières que par d'heureuses modifications de détail.

Si l'on peut trouver, pour chaque valeur de u, la valeur correspondante de l'amplitude τ, et *vice versâ*, on obtiendra, d'après ces formules, les fonctions hyperboliques de u en cherchant dans les Tables trigonométriques ordinaires les fonctions circulaires de τ; et réciproquement, en cherchant la valeur de τ correspondante à l'une des fonctions hyperboliques de u, en vertu des mêmes formules, on aura la valeur de u qui répond à l'amplitude τ.

C'est d'après cette méthode que Gudermann a con-

struit sa première Table, laquelle donne, pour les diverses valeurs de $\tau = \text{Amh}\, u$, de dix-millième en dix-millième du quadrant, ou de $32'',4$ en $32'',4$, les valeurs correspondantes de $u = \mathfrak{L}\tau$, avec sept décimales. L'emploi de cette Table exige qu'on y joigne une Table trigonométrique ordinaire, et de préférence une Table construite suivant la division décimale du quadrant, telle que celles de Borda, de Callet ou de Plauzoles.

Lorsque l'argument u est très-considérable, ou l'angle τ très-voisin de $\frac{\pi}{2}$, l'interpolation par parties proportionnelles devient impraticable. Pour remédier à cet inconvénient, Gudermann a construit une seconde Table donnant directement, pour les valeurs de u plus grandes que 2, les logarithmes des trois fonctions hyperboliques $\text{Ch}\, u$, $\text{Sh}\, u$, $\text{Th}\, u$. Pour les valeurs de u qui dépassent 12, limite de cette seconde Table, on a sensiblement

$$\text{Th}\, u = 1, \quad \text{Ch}\, u = \text{Sh}\, u = \frac{1}{2} e^u.$$

En désignant donc par la caractéristique L les logarithmes vulgaires ou décimaux, et par M le module du système décimal, on pourra prendre

$$\text{L.Th}\, u = 0,$$
$$\text{L.Ch}\, u = \text{L.Sh}\, u = \text{M}u - \text{L.2}.$$

On obtient facilement $\text{M}u$ à l'aide de la Table de conversion des logarithmes naturels en logarithmes vulgaires.

5. Les Tables de Gudermann présentent quelques inconvénients dans la pratique. L'emploi de la première Table exige deux lectures dans deux volumes différents. D'autre part, la seconde Table est incomplète, puisqu'elle ne donne pas les fonctions hyperboliques des arguments moindres que 2.

M. Gronau a évité ces inconvénients, en réunissant la Table des fonctions $u = \int \tau$ à une Table trigonométrique donnant les logarithmes des fonctions circulaires de τ, de sorte que l'on trouve directement, à côté de chaque valeur de u, ou plutôt de $\mathrm{M}u$, les logarithmes des fonctions hyperboliques de u.

Il y a divers avantages à introduire dans la Table, au lieu de l'argument u lui-même, son produit par le module M. D'abord, lorsque u est très-considérable et τ très-voisin de $\frac{\pi}{2}$, l'accroissement des logarithmes vulgaires de $\mathrm{Ch}\,u$ et de $\mathrm{Sh}\,u$ est sensiblement égal à l'accroissement de $\mathrm{M}u$, ce qui simplifie beaucoup l'interpolation de la Table. Cette substitution offre encore certaines facilités dans le calcul des fonctions elliptiques. Dans le cas où u est donné directement, la multiplication que cette disposition exige se fait presque à simple vue au moyen de la Table de conversion dont nous avons parlé.

La Table de M. Gronau est munie, comme les Tables trigonométriques ordinaires, d'un double argument, tant pour les valeurs de τ que pour les valeurs correspondantes de u. Elle donne, pour l'argument de gauche, variant de 0 à 90 degrés, les valeurs logarithmiques de

$$\mathrm{Th}\,u = \sin\tau,\quad \mathrm{Ch}\,u = \mathrm{séc}\,\tau,\quad \mathrm{Sh}\,u = \mathrm{tang}\,\tau,$$

et pour l'argument de droite, variant de 90 degrés à 0, les valeurs de

$$\frac{1}{\mathrm{Ch}\,u} = \cos\tau,\quad \frac{1}{\mathrm{Th}\,u} = \mathrm{coséc}\,\tau,\quad \frac{1}{\mathrm{Sh}\,u} = \cot\tau.$$

Il eût été, selon nous, préférable, au lieu de disposer toutes ces valeurs à la suite les unes des autres, de les disposer de manière que les six fonctions circulaires d'un même angle se trouvassent sur deux pages en regard, de manière, par exemple, que l'on eût trouvé vis-à-vis l'un

de l'autre les logarithmes du sinus et du cosinus d'un même angle. La disposition eût été celle de la *Trigonometria Britannica* de Briggs, et de plusieurs autres recueils, et l'on aurait augmenté notablement la commodité de la Table, sans y inscrire un seul chiffre de plus.

Nous ne pouvons enfin nous empêcher de regretter que M. Gronau ait cru devoir abandonner la division décimale du quadrant, employée par Gudermann, et revenir à la division sexagésimale, dont un préjugé traditionnel maintient, sans aucune raison solide, l'usage dans les calculs qui ne concernent pas directement l'astronomie d'observation ou la navigation. Ce sacrifice à la coutume entraîne, dans bien des cas, des réductions embarrassantes, que l'on aurait évitées complétement en adoptant la division rationnelle du cercle.

En résumé, les Tables de M. Gronau sont d'un emploi très-commode, et, en attendant que la France en possède de semblables, nous ne saurions trop en recommander l'acquisition aux personnes qui pensent, comme nous, que la pratique intelligente et *modérée* du calcul numérique est un utile moyen pour éclaircir la théorie.

6. Il nous reste à parler des Tables de M. Forti. Pour en donner une idée, concevons que sur le même diamètre $= 2$ on ait décrit un cercle et une hyperbole équilatère. Menons un rayon faisant avec le diamètre commun un angle t, lequel mesurera le double du secteur circulaire, et soit u le double du secteur hyperbolique correspondant. Les coordonnées des points où le rayon rencontre les deux courbes seront $\cos t$, $\sin t$ pour le cercle, et $\mathrm{Ch}\,u$, $\mathrm{Sh}\,u$ pour l'hyperbole, et la proportionnalité de ces coordonnées donnera évidemment

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\mathrm{Sh}\,u}{\mathrm{Ch}\,u} \quad \text{ou} \quad \tan t = \mathrm{Th}\,u.$$

De cette relation on tire

$$e^{2u} = \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right),$$

d'où

$$u = \frac{1}{2} \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \frac{1}{2} \mathfrak{L}(2t),$$

et

$$t = \frac{1}{2} \operatorname{Amh}(2u).$$

Quant aux fonctions hyperboliques de u, autre que $\operatorname{Th} u$, elles sont liées aux fonctions circulaires de t par des relations assez compliquées. On se rend donc difficilement compte des raisons qui ont pu déterminer M. Forti à subordonner sa Table des fonctions hyperboliques de u à la Table des fonctions circulaires de t, les deux Tables n'ayant entre elles aucune liaison naturelle, et leur juxtaposition n'étant d'aucune utilité dans la pratique.

Le volume publié par M. Forti comprend deux Tables, dont la première contient huit colonnes disposées sur deux pages en regard. Les pages de gauche contiennent une reproduction exacte des Tables trigonométriques à cinq décimales de Lalande, et donnent ainsi les fonctions circulaires de l'angle t, de minute en minute. Les pages de droite contiennent, pour les mêmes valeurs de l'angle $t = \frac{1}{2} \operatorname{Amh}(2u)$ les valeurs correspondantes des quatre quantités

$$\tau = \operatorname{Amh} u, \quad \mathrm{L.Ch}\, u, \quad \mathrm{L.Sh}\, u, \quad \mathrm{L.}\, u.$$

La seule colonne de la page à gauche qui ait quelque rapport avec les fonctions hyperboliques est celle qui donne

$$\mathrm{L.}\tan t = \mathrm{L.Th}\, u.$$

En outre, la Table de fonctions hyperboliques offre le double inconvénient d'avoir pour argument L u au lieu du nombre u lui-même ou de son produit par M, et de devenir par cela même d'un usage impraticable pour les valeurs de u très-considérables, ou pour les valeurs de τ voisines de 90 degrés.

La seconde Table donne, pour les diverses valeurs de $\frac{1}{2}\tau$, croissant de minute en minute, les valeurs correspondantes de u et de

$$\mathrm{L.tang}\,t = \mathrm{L.sin}\,\tau = \mathrm{L.Th}\,u.$$

Cette Table, qui exige concurremment l'emploi de la première, nous semble d'un usage peu commode.

Nous ne pouvons donc énoncer sur l'ouvrage de M. Forti une appréciation aussi favorable que sur celui de M. Gronau, et nous sommes même loin de partager l'avis de l'auteur de la préface, lorsqu'il déclare ne trouver d'autre mérite au Traité de Gudermann que les exemples pratiques qu'il renferme (*). Malgré leurs imperfections, les Tables de Gudermann nous semblent de beaucoup supérieures dans la pratique à celles de M. Forti, surtout quand il s'agit des applications à la théorie des fonctions elliptiques, auxquelles rien ne fait allusion dans le recueil italien, et qui constituent cependant l'emploi le plus important des fonctions hyperboliques.

7. Indiquons, en terminant cette Note, quelques applications des fonctions hyperboliques, pour montrer l'usage des nouvelles Tables.

1° Soit proposé de résoudre l'équation du troisième

(*) « Le sue tavole però sono incomode; e il solo merito che noi revvisiamo nel suo lavoro sulle funzioni iperboliche consiste nell' aggiunta ch' egli ha fatto di varie e nuove applicazioni. »

degré, dans le cas où une seule des racines est réelle. En procédant d'une manière analogue à celle qui conduit à la résolution par les fonctions circulaires dans le cas où les trois racines sont réelles, on identifiera l'équation privée de second terme

$$x^3 \mp px + q = 0$$

(p étant positif et q de signe quelconque) avec l'une des équations

$$4\,\mathrm{Ch}^3\frac{u}{3} - 3\,\mathrm{Ch}\frac{u}{3} - \mathrm{Ch}\,u = 0,$$

$$4\,\mathrm{Sh}^3\frac{u}{3} + 3\,\mathrm{Sh}\frac{u}{3} - \mathrm{Sh}\,u = 0,$$

qui donnent la trisection de l'argument u. Dans le cas où le second terme a le signe —, par exemple, on déterminera l'argument u par la formule

$$\mathrm{Ch}\,u = -\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}},$$

le radical étant pris avec un signe tel, que le second membre soit positif, et les trois racines de l'équation seront (le radical étant pris avec le même signe)

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{Ch}\frac{u}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\mathrm{Ch}\frac{u}{3} \pm \sqrt{-3}\,.\,\mathrm{Sh}\frac{u}{3}\right)$$

$$= -\frac{x_1}{2} \mp \sqrt{-p}\,.\,\mathrm{Sh}\frac{u}{3}.$$

Ces formules sont, comme on le voit, beaucoup plus simples que celles qui résultent de l'emploi des fonctions circulaires dans le même cas.

Soit, par exemple, comme dans le cas traité par M. Forti,

$$-p = -901,498, \quad q = -13502,84.$$

Voici le tableau du calcul, exécuté au moyen de la Table de M. Gronau :

$\frac{p}{3} = 300,499$		$\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}$	$0,01162$
$\frac{q}{2} = -6526,42$		$2\sqrt{\frac{p}{3}}$	$1,53995$
$\frac{p}{3}$	$2,477844$	x_1	$1,55157$
$\frac{3}{p}$	$\bar{3},522156$	$\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}$	$\bar{1},36999$
$\sqrt{\frac{3}{p}}$	$\bar{2},761078$	$\sqrt{\frac{p}{3}}$	$1,23892$
$\frac{-q}{2}$	$3,814675$	$\sqrt{3}$	$0,23856$
$\mathrm{Ch}\,u$	$0,097909$	$\sqrt{p}\,.\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}\,u$ ...	$0,84747$
$\mathrm{M}u = 0,30269$			
$\frac{1}{3}\mathrm{M}u = 0,10090$			

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -(1,25054) \mp (0,84747)\sqrt{-1},$$

les nombres entre parenthèses étant des valeurs logarithmiques.

2° Soient a le demi-axe équatorial, b le demi-axe polaire d'un sphéroïde aplati, e l'excentricité de l'ellipse méridienne, p le demi-paramètre $= a(1-e^2)$. La surface de la zone comprise entre l'équateur et le parallèle situé

à la distance y a pour expression

$$S = \pi b^2 \left[\frac{y}{p} \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{p^2}} + \frac{1}{e} \log \left(\frac{ey}{p} + \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{p^2}} \right) \right].$$

Pour calculer cette expression, posons

$$\frac{ey}{p} = \text{Sh}\, u;$$

il viendra

$$S = \frac{\pi b^2}{e} \left(\frac{1}{2} \text{Sh}\, 2u + u \right).$$

S'il s'agit de la surface totale du sphéroïde, on fera

$$\text{Sh}\, u = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}},$$

et l'on doublera l'expression précédente.

Si l'on demande, par exemple, la surface du sphéroïde terrestre, dont l'aplatissement $= \frac{1}{299,153}$, on a

L. e	$\bar{2},91221$
L. $\sqrt{1 - e^2}$	$\bar{1},99855$
L. Sh u	$\bar{2},91366$
$Mu = 0,035560$	
$2Mu = 0,071120$	
L. Sh $2u$	$\bar{1},21615$

0,035	0,080590.5
56	1289.4
$u = 0,081880$	
$\frac{1}{2}$ Sh $2u = 0,082247$	
$u + \frac{1}{2}$ Sh $2u = 0,164127$	
Log.	$\bar{1},21518$
$\frac{1}{2e}$	0,78676
	0,00194
$1 - e^2$	$\bar{1},99710$
	$\bar{1},99904$

Donc

$$S = 4\pi b^2.(0,00194) = 4\pi a^2.(\bar{1},99904).$$

On a ainsi les rapports de la surface du sphéroïde aux surfaces des deux sphères ayant pour diamètres le diamètre polaire et le diamètre équatorial.

3° Dans le Mémoire de Jacobi sur la rotation des corps (*Journal de Crelle*, t. XXXIX), on trouve, p. 329, la formule

$$\psi' = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

i étant mis pour $\sqrt{-1}$. Si l'on pose, en adoptant les notations classiques des *Fundamenta nova*,

$$x = \frac{\pi u}{2K}, \quad \alpha = \frac{\pi a}{2K},$$

et que l'on remplace la fonction Θ par son développement connu, la formule en question devient, après la disparition des imaginaires,

$$\operatorname{tang}\psi' = \pm \frac{2q\,\mathrm{Sh}\,2\alpha \sin 2x - 2q^4\,\mathrm{Sh}\,4\alpha \sin 4x + \ldots}{1 - 2q\,\mathrm{Ch}\,2\alpha \cos 2x + 2q^4\,\mathrm{Ch}\,4\alpha \cos 4x - \ldots}.$$

Soit donné l'angle du module

$$\theta = 29^\circ 20' 2''$$

avec $L\alpha = \bar{1},89499$. On en conclut $L(M\alpha) = \bar{1},53277$,

$$M\alpha = 0,34102,$$
$$2M\alpha = 0,68204,$$
$$4M\alpha = 1,36408.$$

On a ensuite, au moyen de la petite Table calculée par

Jacobi, ou mieux, au moyen des Tables plus étendues, publiées par M. Meissel (Iserlohn, 1860),

$$\text{L}.q = \bar{2},23415.$$

La Table de Gronau donne

$$\text{L.Sh}2\alpha = 0,36181, \quad \text{L.Sh}4\alpha = 1,062,$$
$$\text{L.Ch}2\alpha = 0,39939, \quad \text{L.Ch}4\alpha = 1,064.$$

On en conclut

$$\tan\text{g}\,\psi' = \pm \frac{(\bar{2},89699)\sin 2x - (\bar{6},300)\sin 4x + \ldots}{1 - (\bar{2},93457)\cos 2x + \bar{6},302)\cos 4x - \ldots},$$

formule qui fait connaître très-simplement la valeur de l'angle ψ' qui correspond à chaque valeur de la variable x.

Nous nous bornerons à ce petit nombre d'exemples, ne pouvant même indiquer les nombreuses applications des fonctions hyperboliques dans le calcul intégral et dans la Mécanique, où elles jouent un rôle presque aussi important que les fonctions circulaires.

REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION ET L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS

(voir page 122);

PAR M. E. PROUHET.

---

8. PROBLÈME. — *Sachant que le produit de deux racines d'une équation est l'unité, trouver ces deux racines.*

Les deux racines seront communes à l'équation proposée

(1) $$f(x) = 0,$$

et à sa transformée

(2) $$x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Mais au lieu d'appliquer à ces deux équations l'opération du plus grand commun diviseur, il y aura avantage à les remplacer par les suivantes :

(3) $$f(x) + x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

(4) $$f(x) - x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

qui sont évidemment réciproques, et par conséquent susceptibles d'abaissement.

Exemple :

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 = 0.$$

L'équation aux inverses des racines sera

$$A_4 + A_3 x + A_2 x^2 + A_1 x^3 + A_0 x^4 = 0.$$

On aura donc les équations réciproques

$$A_0 + A_4 + (A_1 + A_3)x + 2A_2x^2 + (A_3 + A_1)x^3 + (A_4 + A_0)x^4 = 0,$$

$$A_0 - A_4 + (A_1 - A_3)x - (A_1 - A_3)x^3 - (A_0 - A_4)x^4 = 0,$$

ou bien

$$(A_0 + A_4)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (A_1 + A_3)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2A_2 = 0,$$

$$(A_0 - A_4)\left(x_2 - \frac{1}{x^2}\right) + (A_1 - A_3)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Cette dernière se réduit à

$$(A_0 - A_4)\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_1 - A_3 = 0,$$

d'où

$$x + \frac{1}{x} = \frac{A_1 - A_3}{A_4 - A_0},$$

équation qui fait connaître les deux racines cherchées; mais il y a une équation de condition. Si l'on pose

$$z = x + \frac{1}{x},$$

on aura

$$(A_0 + A_4)z^2 + (A_1 + A_3)z + 2(A_2 - A_0 - A_4) = 0,$$

$$z = \frac{A_1 - A_3}{A_4 - A_0}.$$

Éliminant z, il vient

$$(A_0 + A_4)(A_1 - A_3)^2 + (A_1^2 - A_3^2)(A_4 - A_0) + 2(A_2 - A_0 - A_4)(A_4 - A_0)^2 = 0.$$

Telle est la relation qui doit avoir lieu pour que l'équation du quatrième degré ait deux racines réciproques.

9. Il est clair qu'on ramènerait au problème précé-

dent celui qui consisterait à chercher deux racines dont le produit serait égal à α^2. Il suffirait de diviser toutes les racines de l'équation proposée par α.

On trouvera sans peine les conditions qui devront être remplies pour que les racines d'une équation se partagent en couples donnant le même produit; mais cette propriété n'appartiendra en même temps à la dérivée que dans un cas très-particulier.

10. Problème. — *Trouver une équation qui ait pour racines les carrés des racines d'une autre équation.*

Si

$$(1)\qquad f(x)=0$$

est l'équation proposée, il suffit de poser

$$(2)\qquad y=x^2$$

et d'éliminer x entre les équations (1) et (2); mais on arrivera plus tôt au résultat en remarquant que l'équation

$$(3)\qquad f(x)f(-x)=0,$$

qui ne change pas quand on change x en $-x$, est de la forme

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)\ldots(x^2-l^2)=0,$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant les racines de l'équation (1); donc, si l'on fait $x^2=y$ dans l'équation (3), on aura l'équation demandée.

Si l'on désigne par P l'ensemble des termes de $f(x)$ qui contiennent x à des puissances paires, et par Qx l'ensemble des autres termes (Q étant une fonction de x^2), on aura

$$f(x)f(-x)=(P+Qx)(P-Qx)=P^2-Q^2x^2=0.$$

Par exemple, l'équation aux carrés des racines de

l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sera, en posant $x^2 = y$,

$$(py + r)^2 - (y + q)^2 y = 0.$$

11. Problème. — *Trouver l'équation aux cubes des racines d'une équation proposée.*

On peut toujours écrire

$$f(x) = P + Qx + Rx^2,$$

P, Q, R désignant des fonctions de x^3, car il suffit pour cela de partager les termes en trois groupes, suivant que l'exposant de x divisé par 3 ne laisse aucun reste, ou donne pour reste 1 ou 2. Soient α et α^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité, nous aurons

$$f(\alpha x) = P + Q\alpha x + R\alpha^2 x^2,$$
$$f(\alpha^2 x) = P + Q\alpha^2 x + R\alpha x^2,$$

et

$$f(x) f(\alpha x) f(\alpha^2 x) = P^3 + Q^3 x^3 + R^3 x^6 - 3PQRx^3.$$

Si a est une racine de l'équation $f(x) = 0$, a, $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{a}{\alpha^2}$, ou a, $a\alpha^2$, $a\alpha$ seront des racines de l'équation

$$f(x) f(\alpha x) f(\alpha^2 x) = 0,$$

dont le premier membre sera divisible par

$$(x - a)(x - \alpha a)(x - \alpha^2 a), \quad \text{ou} \quad x^3 - a^3.$$

Donc, si dans la dernière équation, c'est-à-dire dans

$$P^3 + Q^3 x^3 + R^3 x^6 - 3PQRx^3 = 0,$$

on fait $x^3 = y$, on aura l'équation aux cubes des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Par exemple, l'équation aux cubes des racines de

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sera

$$(y+r)^3 + p^3y^2 + q^3y - 3pq(y+r)y = 0.$$

12. Plus généralement, si l'on voulait former une équation ayant pour racines les racines de l'équation $f(x) = 0$ élevées à la $n^{ième}$ puissance, il suffirait de faire $y = x^n$ dans l'équation

$$f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x)\ldots f(\alpha^{n-1} x) = 0,$$

α désignant une racine primitive de l'équation $x^n - 1 = 0$. Waring a indiqué cette méthode dans ses *Miscellanea analytica*, 1772, p. 12. Depuis, M. Kummer ayant eu à considérer un produit de la forme précédente, dans une question très-différente de celle que nous traitons, a remarqué que cette fonction était un déterminant (*). Dès lors la solution de Waring prend une autre forme que nous allons faire connaître, et qui, quoique un peu compliquée, ne laissera pas de plaire à ceux qui aiment les déterminants.

Posons

$$f(x) = P + Qx + Rx^2 + \ldots + Ux^{n-3} + Vx^{n-2} + Zx^{n-1},$$

P, Q, R,..., U, Z étant des fonctions de x^n. Pour avoir l'équation aux $n^{ièmes}$ puissances des racines de l'équation $f(x) = 0$, il suffira de faire $x^n = y$ dans l'équation

$$\begin{vmatrix} P & Qx & Rx^2 & \ldots & Zx^{n-1} \\ Zx^{n-1} & P & Qx & \ldots & Vx^{n-2} \\ Vx^{n-2} & Zx^{n-1} & P & \ldots & Ux^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Qx & Rx^2 & Sx^3 & \ldots & P \end{vmatrix} = 0.$$

(*) *De Numeris complexis, qui radicibus unitatis, etc.* (*Journal de M. Liouville*, t. XII, p. 187-188).

On voit que les lignes successives ne sont que des permutations circulaires des termes de la première.

(*Sera continué.*) P.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. S. REALIS.

Toute fonction rationnelle et fractionnaire d'une variable x peut être considérée comme résultant de l'addition d'un polynôme entier par rapport à la variable (qui peut être nul) et d'une fraction dont le numérateur est de degré moindre que le dénominateur. Le but de cette Note est de simplifier en quelques points la théorie ordinaire de la décomposition de cette fraction en fractions simples.

Je me rapporte aux notations et aux résultats des leçons VIe et VIIe de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret (2e édition), et je considère la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, que je suppose réduite à sa plus simple expression, et dont le dénominateur (de degré plus élevé que le numérateur) est le produit des facteurs $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta, \ldots,$ $(x-c)^\gamma$ correspondants aux racines distinctes de l'équation $f(x)=0$.

La décomposition doit donner, par identité et d'une seule manière, un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ & +\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\frac{C}{(x-c)^\gamma}+\frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}}+\frac{C_2}{(x-c)^{\gamma-2}}+\ldots+\frac{C_{\gamma-1}}{x-c},\end{aligned}$$

les A, B,..., C étant des quantités finies, indépendantes de x.

Cherchons à déterminer les numérateurs A, A_1,..., $A_{\alpha-1}$ de la partie de la valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ qui est relative à la racine a. A cet effet, multiplions l'égalité ci-dessus par $(x-a)^\alpha$, et désignons, pour abréger, par $\theta(x)$ l'ensemble des parties de $\frac{F(x)}{f(x)}$ relatives à toutes les autres racines de $f(x)=0$, et par $\varphi(x)$ la fraction $\frac{(x-a)^\alpha F(x)}{f(x)}$. On aura, par identité,

$$\varphi(x) = A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \ldots$$
$$+ A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha \theta(x).$$

Il suffit de l'inspection de cette formule pour voir immédiatement qu'en y faisant, ainsi que dans ses dérivées successives jusqu'à celle de l'ordre $\alpha-1$ inclusivement, $x=a$, on aura

$$\varphi(a) = A, \quad \frac{\varphi'(a)}{1} = A_1, \quad \frac{\varphi''(a)}{1.2} = A_2, \ldots,$$
$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3} = A_3, \ldots, \quad \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)} = A_{\alpha-1}.$$

On obtiendra de même les valeurs des autres constantes B, B_1,..., C, C_1,..., ci-dessus. Cette manière de parvenir à l'expression algébrique des numérateurs des diverses fractions partielles qui composent la fraction rationnelle proposée, est, ce me semble, plus expéditive et plus simple que celle qu'on trouve exposée dans l'*Algèbre supérieure* (p. 84 à 86) et dans les autres ouvrages didactiques.

Ces expressions des numérateurs des fractions par-

tielles peuvent s'appliquer aux racines imaginaires de $f(x) = 0$ aussi bien qu'aux racines réelles, mais la complication des réductions entre les termes homologues relatifs aux racines imaginaires conjuguées rend préférable en général, pour ces racines, la décomposition directe en fractions partielles ayant pour dénominateurs les facteurs réels du second degré de $f(x)$, et pour numérateurs des fonctions linéaires de la variable.

Soit

$$X = (x - h)^2 + k^2$$

un de ces facteurs, n son degré de multiplicité dans $f(x)$, et désignons maintenant par $\varphi(x)$ la fraction $\frac{X^n F(x)}{f(x)}$, et par $\theta(x)$ l'ensemble des fractions partielles qui répondent à tous les facteurs de $f(x)$ autres que $(x - h)^2 + k^2$. On doit parvenir à un résultat de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{X^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{X} + \theta(x),$$

les P, Q étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. On aura donc

$$\varphi(x) = Px + Q + (P_1 x + Q_1) X + (P_2 x + Q_2) X^2 + \ldots$$
$$+ (P_{n-1} x + Q_{n-1}) X^{n-1} + X^n \theta(x).$$

Faisant, dans cette équation identique, $x = h + k\sqrt{-1}$, et désignant par $M + N\sqrt{-1}$ ce que devient $\varphi(x)$ dans cette hypothèse, on obtient l'équation

$$M + N\sqrt{-1} = P(h + k\sqrt{-1}) + Q,$$

qui se décompose dans les deux suivantes :

$$M = Ph + Q, \quad N = Pk.$$

On tire de celles-ci, pour P et Q, les valeurs réelles et

finies

$$P = \frac{N}{k}, \quad Q = \frac{Mk - Nh}{k}.$$

Prenant ensuite les dérivées successives de l'équation identique ci-dessus, jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, et faisant partout $x = h + k\sqrt{-1}$, il s'introduira, à chaque différentiation, deux nouveaux coefficients inconnus, et chacune des équations ainsi obtenues se partagera en deux autres servant à déterminer ces coefficients.

Ce procédé, quoique plus simple que ceux qu'on trouve indiqués dans les Traités d'Analyse, ne laisse pas toutefois que de présenter des complications de calcul dans la réduction des imaginaires. Je crois utile de remarquer que l'on évitera entièrement ces complications, quel que soit d'ailleurs le procédé qu'on emploie pour la décomposition, en réduisant d'abord le facteur X à la forme $y^2 + k^2$, c'est-à-dire en posant $x - h = y$. La racine imaginaire se trouvera par là exprimée par $y = k\sqrt{-1}$, et l'on aura à opérer sur une fraction rationnelle de la forme $\frac{\Pi(y)}{(y^2 + k^2)^n \varpi(y)}$, qui se prête facilement au calcul des fractions partielles

$$\frac{Py + Q}{(y^2 + k^2)^n}, \quad \frac{P_1 y + Q_1}{(y^2 + k^2)^{n-1}}, \quad \frac{P_{n-1} y + Q_{n-1}}{y^2 + k^2}.$$

Ce calcul achevé, on remettra partout $x - h$ à la place de y, et l'on obtiendra les fractions partielles relatives au facteur X.

Lorsque le but de la décomposition, ainsi que cela arrive souvent, est l'intégration de la formule différentielle $\frac{F(x)\,dx}{f(x)}$, il y a d'autant plus avantage à se servir de la simplification indiquée, que, quand même on aurait

déterminé directement les fractions partielles en x, il y aurait toujours lieu d'employer ensuite les transformées en y pour obtenir les différentes intégrales. Autant vaut-il, par conséquent, avoir recours tout d'abord à cette transformation, qui facilite à la fois les procédés et de la décomposition et de l'intégration, et ne revenir aux expressions en x qu'après les intégrations effectuées.

QUESTIONS.

708. On sait que si d'un point quelconque, P, de la circonférence circonscrite à un triangle, ABC, on mène des perpendiculaires aux trois côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires se trouvent sur une même droite. Démontrer que cette droite est également distante du point P et du point de rencontre des trois hauteurs du triangle ABC.

On demande une démonstration géométrique de ce théorème.

709. Trouver le lieu géométrique d'un point tel, que la somme des carrés des trois normales menées de ce point à une parabole donnée soit égale à un carré donné k^2.

710. Soient a, b, c les milieux des côtés d'un triangle ABC;

a_1, b_1, c_1 les pieds des hauteurs;

α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 les points d'intersection (bc_1, cb_1), (ca_1, ac_1), (ab_1, ba_1), (bc, b_1c_1), (ca, c_1a_1), (ab, a_1b_1):

M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;

H le point d'intersection des hauteurs;

O le centre du cercle des neuf points.

Cette notation admise, on aura les propriétés suivantes :

1° Les points α, β, γ sont sur la droite HM.

2° Les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à la droite HM.

3° Les quatre points α, β_1, γ_1, A sont en ligne droite. Il en est de même des quatre points β, γ_1, α_1, B, et des quatre points γ, α_1, β_1, C.

4° α_1, β_1, γ_1 sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle des neuf points (O).

5° Les droites $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ passent par un même point P, et pareillement les droites $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ passent par un même point P_1.

6° Les deux points P, P_1 appartiennent à la circonférence des neuf points (O).

7° Les points d'intersection $(AB, \alpha_1\beta_1)$, $(BC, \beta_1\gamma_1)$, $(CA, \gamma_1\alpha_1)$ sont sur une même droite qui passe par P, P_1.

La démonstration de ces différentes propriétés est proposée par M. Schrœter, professeur à l'Université de Breslau.

711. *Théorèmes à démontrer.* — I. En désignant par x_r, y_r, z_r les coordonnées d'un point a_r, on a, pour un point quelconque O,

$$\begin{vmatrix} \overline{Oa_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{Oa_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{Oa_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{Oa_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{Oa_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \text{constante.}$$

Lorsque les points a_r sont sur une sphère, on sait que ce déterminant est nul.

II. Les sommets d'un polygone étant aux points a, b,

c, d,..., menons par un point arbitraire o des parallèles aux côtés de l'angle a, et désignons par A la surface du parallélogramme ainsi construit. Soient B, C, D,..., les surfaces des parallélogrammes déterminés de la même manière aux sommets b, c, d,.... Démontrer que le point o est le centre de gravité des poids $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$,..., placés aux sommets a, b, c,....

Il y a un théorème correspondant dans l'espace.

III. Un polygone étant inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle, démontrer que : 1° le centre des moyennes distances de ses sommets est situé sur la droite qui unit les centres des deux cercles ; 2° la surface du polygone est égale à la somme des sinus de ses angles multipliée par la moitié de la puissance du centre du cercle inscrit, prise par rapport au cercle circonscrit.

IV. Une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \ldots = 0,$$

dans laquelle f désigne une fonction algébrique, a toujours des racines imaginaires. (H. Faure.)

712. Une ellipse, E, étant donnée, décrire une autre ellipse, E′, homothétique à la première, et telle, que si d'un point A pris arbitrairement sur E on conduit à E′ deux tangentes AM, AN, rencontrant E en des points B, C, la droite BC qui unit ces deux points d'intersection soit aussi tangente à l'ellipse E′.

Cette condition étant supposée remplie, démontrer que l'aire du triangle ABC est une quantité invariable, et qu'il en est de même de la somme des distances des trois sommets A, B, C de ce triangle à l'un des foyers de l'ellipse E donnée.

713. On donne dans l'espace deux droites indéfinies L,

L', non situées dans *un même* plan, et un point O : décrire de ce point comme centre une sphère qui coupe les droites L, L' en des points A, B, A', B', tels, que le tétraèdre ABA'B', qui a ces points d'intersection pour sommets, soit équivalent à un cube donné c^3.

714. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5.$$

Nombre des solutions entières et positives.

715. Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite donnée, et qui la coupent en deux points fixes, est une cissoïde.

716. Quatre cercles OA'C'B', OAB'C, OBCA', OAC'B passent par un même point O. Prouver que les points de concours des cordes OA', BC; OB', AC; OC', AB sont en ligne droite; ou encore OA, B'C; OB, A'C; OC', A'B'; etc.

717. Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre, une tangente et un point.

Ces trois dernières questions sont proposées par M. Mention.

NOTE SUR LES IMAGINAIRES;

PAR M. URBAIN CHEYRÉZY,
Élève en Mathématiques spéciales, à Metz (école Saint-Clément).

Dans les *Nouvelles Annales de* 1863, p. 206, on démontre ce théorème :

Arc sin x, arc cos x sont réductibles à la forme $a + b\sqrt{-1}$, pour x plus grand que 1.

Voici, je crois, une autre démonstration, fort simple, de cette proposition.

Je vais prendre $\operatorname{arc}\cos x$: les mêmes raisonnements s'appliqueraient au cas de $\operatorname{arc}\sin x$.

On a, d'après un théorème connu,

$$L(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + 2k\pi\sqrt{-1} = \varphi\sqrt{-1}.$$

On tire de là

$$L(x + \sqrt{x^2 - 1}) + 2k\pi\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\operatorname{arc}\cos x.$$

Cette formule étant vraie quel que soit x, supposons $x > 1$; nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{arc}\cos x &= \frac{L(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{-1}} + 2k\pi \\ &= -\sqrt{-1}\,L(x + \sqrt{x^2 - 1}) + 2k\pi.\end{aligned}$$

Le coefficient de $\sqrt{-1}$ est réel; le théorème est donc démontré.

SOLUTION D'UNE QUESTION
proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique (année 1864) [Composition mathématique];

PAR M. E. STOULS,
Élève en Mathématiques spéciales, à Metz (école Saint-Clément).

ÉNONCÉ. — *On donne le cercle représenté par l'équation*

$$x^2 + y^2 = 1,$$

et la parabole représentée par l'équation

$$\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2},$$

où α et β sont des paramètres positifs quelconques.

On propose de déterminer : 1° *le nombre des points réels communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de α et de β ;* 2° *les coordonnées des quatre points communs lorsque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, lorsque $\alpha = 1$ avec $\beta > 0$, lorsque $\beta = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)}$* (*).

Solution. — Cherchons le système de sécantes communes aux deux courbes. Leur équation est de la forme

$$(1) \qquad \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \ldots + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

λ étant donné par l'équation

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2\lambda^3 + [3\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)]\lambda^2 \\ &\quad + (\alpha^2 + \beta^2)(4\alpha^2 + \beta^2 - 1)\lambda + \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On trouve que l'une des racines de l'équation (2) est

$$\lambda = -(\alpha^2 + \beta^2).$$

L'un des systèmes cherchés est donc

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 - 2\alpha x - 2\beta y \\ &\quad + \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2} - (\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

(*) En posant

$$x = \frac{\alpha X - 6Y}{\sqrt{\alpha^2 + 6^2}}, \quad y = \frac{\alpha Y + 6X}{\sqrt{\alpha^2 + 6^2}},$$

les équations proposées deviennent

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad (\alpha^2 + 6^2)Y^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + 6^2}\,X = \frac{3\alpha^2 + 6^2 - 1}{\alpha^2};$$

et les solutions communes s'obtiennent facilement. G.

DISCUSSION.

Première partie : $\beta > 0$.

Dans ce cas, l'équation (3) nous donne

$$y = -\frac{\alpha x - 1}{\beta} \pm \frac{k}{\alpha\beta},$$

en posant, pour abréger,

$$(4) \qquad k = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}.$$

Les deux droites obtenues sont parallèles entre elles, et même perpendiculaires à l'axe de la parabole.

Trois cas peuvent maintenant se présenter : $\alpha^2 - 1 \gtreqless 0$.

Premier cas : $\alpha^2 - 1 > 0$. — Dans ce cas, $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ est aussi > 0; donc k est toujours *réel et différent de* 0; donc les deux sécantes obtenues sont *réelles* et *distinctes*. A cause de cette réalité, on pourra trouver le nombre des points de rencontre, en cherchant si la distance de chacune de ces droites au centre du cercle est plus grande ou plus petite que le rayon. Pour qu'il y ait rencontre, il faut que l'on ait

$$\frac{\left(\frac{1}{\beta} \pm \frac{k}{\alpha\beta}\right)^2}{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} < 1,$$

ou

$$\alpha^2 + k^2 \pm 2\alpha k < \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2),$$

ou

$$(5) \qquad \pm 2\alpha k < \alpha^2 + \beta^2 - 1.$$

Comme α est positif, $-2\alpha k$ est négatif. L'inégalité (5) est toujours vérifiée pour le signe — : donc la sécante correspondant au signe — rencontre toujours les courbes

en deux points réels et distincts. Donc, dans le cas actuel, *les deux courbes ont au moins deux intersections réelles et distinctes.*

Cherchons ce que donne la deuxième sécante.

L'inégalité $2\alpha k < \alpha^2 + \beta^2 - 1$ ayant ses deux termes positifs, je puis la remplacer par

$$4\alpha^2 k^2 < (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2;$$

et comme le facteur $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ est positif, on peut le supprimer des deux côtés. Il vient alors

$$(6) \qquad \beta^2 > (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1).$$

1° Si cette inégalité est vérifiée, il y *deux nouveaux points réels.*

2° Si on a, au contraire, $\beta^2 < (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)$, la seconde sécante ne donne rien.

3° Si on a $\beta^2 = (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)$, la seconde droite est tangente.

Dans ce dernier cas, les abscisses d'intersection des deux lignes sont données par l'équation

$$[4\alpha^2(\alpha^2 - 1) + 1]x^2 - 2\alpha[1 \pm 2(\alpha^2 - 1)]x + (\alpha^2 - 1)(-3 \pm 4) + 1 = 0.$$

L'équation obtenue en choisissant le signe + correspond à la droite qui est tangente. Ses racines sont égales et ont pour valeur

$$x = \frac{\alpha}{2\alpha^2 - 1}.$$

Second cas : $\alpha^2 - 1 = 0$. — On voit qu'alors $k = 0$; les deux sécantes se confondent en une seule qui rencontre les deux courbes. En effet, l'inégalité (5) se réduisant à $\beta^2 > 0$ est vérifiée d'elle-même. De plus, chacun des points de rencontre étant un point double, la para-

bole est doublement tangente au cercle. La sécante trouvée est la corde des contacts, et les coordonnées des points de contact sont

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \\ y = \dfrac{2\beta}{\beta^2 + 1}. \end{cases}$$

Troisième cas : $\alpha^2 - 1 < 0$. — Ce cas se partage lui-même en trois autres.

1°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0.$$

Alors *il n'y a pas d'intersections réelles.*

Car on ne peut faire que les trois hypothèses suivantes : 1° les trois racines de l'équation en λ sont réelles et à chacune correspond un système de sécantes réelles ; 2° les trois racines étant réelles, une seule d'entre elles donne des sécantes réelles ; 3° une seule racine est réelle [ici cette racine serait $-(\alpha^2 + \beta^2)$]. Or, la première hypothèse doit être rejetée ; car pour

$$\alpha^2 - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0,$$

k est imaginaire ; donc l'un au moins des systèmes de sécantes n'est pas réel. La dernière hypothèse est de même inadmissible, car dans ce cas la racine réelle donnerait des sécantes imaginaires, ce qui est impossible puisque les trois systèmes seraient alors imaginaires. Donc, la seconde hypothèse subsiste seule. Mais on sait que dans ce cas les *quatre points d'intersection sont imaginaires.*

Donc, il n'y a pas d'intersections réelles.

2°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 < 0.$$

k est toujours *réel* et *différent de* o; donc les deux sécantes obtenues sont *réelles* et *distinctes*. Ce cas doit être traité comme l'un des précédents. La considération de l'inégalité (5) montre que la sécante correspondant au signe + ne donne aucun point réel. Donc, dans ce cas, *les deux courbes ont au moins deux intersections imaginaires*.

Cherchons ce que donne la seconde sécante.

Les deux membres de l'inégalité

$$-2\alpha k < \alpha^2 + \beta^2 - 1$$

étant négatifs, je puis les élever au carré après avoir changé le sens de l'inégalité. Il faut donc vérifier la condition

$$4\alpha^2 k^2 > (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2;$$

et comme le facteur $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ est négatif, je puis le supprimer des deux côtés en changeant de nouveau le sens de l'inégalité. Cette condition devient alors, comme ci-dessus,

$$\beta^2 > (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1).$$

La considération de cette inégalité montrerait comme précédemment qu'il peut y avoir deux points réels, distincts ou non, ou deux points imaginaires.

3° $$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

$k = 0$; les deux sécantes se confondent en une droite unique qui est tangente aux deux courbes au point $\dfrac{x = \alpha}{y = \beta}$. Ce point de rencontre étant un point quadruple, *le contact des deux courbes est du troisième ordre*.

Deuxième partie : $\beta = 0$.

L'équation (3), qui donne un des systèmes de sécantes

communes, se réduit à

$$\alpha^4 x^2 - 2\alpha^3 x - \alpha^4 + 3\alpha^2 - 1 = 0.$$

α étant supposé différent de o, cette équation donne

$$x = \frac{\alpha \pm (\alpha^2 - 1)}{\alpha^2}.$$

Donc, les deux sécantes sont *réelles*, *distinctes*, *parallèles entre elles* et *perpendiculaires à l'axe de la parabole*.

En raisonnant comme plus haut, on voit que pour que les intersections soient réelles, il faut que l'on ait

$$\frac{\alpha \pm (\alpha^2 - 1)}{\alpha^2} < 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha - 1 < 0 \quad \text{ou} \quad 2\alpha^2 - \alpha - 1 > 0.$$

La dernière inégalité peut s'écrire

$$2(\alpha - 1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Supposons maintenant $\alpha \gtrless 1$, les deux inégalités ne seront jamais vérifiées simultanément. Donc, *deux points réels seulement*. Si $\alpha = 1$, les sécantes se confondent en une droite unique $x = 1$, tangente aux deux courbes. Ces deux courbes ont un contact du troisième ordre au point

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Remarque. — Dans le cas de $\beta > 0$, nous avons supposé α différent de o. On pourrait cependant faire $\alpha = 0$ à condition de supposer *auparavant* que $\beta^2 - 1$ est de la forme $C\alpha^2$, C étant une constante quelconque. Nous n'é-

tudions pas ce cas, qui est assez simple mais ne donne aucun résultat intéressant.

Dans le cas de $\beta = 0$, on ne peut en aucune façon supposer $\alpha = 0$.

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION.

Première partie : $\beta > 0$.

Premier cas : $\alpha^2 - 1 > 0$.

Il y a AU MOINS *deux intersections réelles et distinctes.*

Suivant qu'on a

$$\beta^2 \gtreqless (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1),$$

les deux autres points de rencontre sont réels et distincts, ou réels et confondus, ou imaginaires.

Deuxième cas : $\alpha^2 - 1 = 0$.

Il y a quatre points réels se confondant deux à deux.

La parabole est doublement tangente au cercle.

Troisième cas : $\alpha^2 - 1 < 0$.

1°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0.$$

Quatre points imaginaires.

2°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 < 0.$$

AU MOINS *deux intersections imaginaires.*

Suivant qu'on a

$$\beta^2 \gtreqless (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1),$$

les deux autres points de rencontre sont réels et distincts, ou réels et confondus, ou imaginaires.

3°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

Quatre points réels se confondant en un seul.

Il y a contact du troisième ordre entre les courbes.

Seconde partie : $\beta = 0$.

Premier cas : $\alpha \gtrless 1$.

Deux points réels et distincts, deux imaginaires.

Deuxième cas : $\alpha = 1$.

Contact du troisième ordre.

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE);

Solution de M. Al. M.,
Élève en Mathématiques élémentaires.

Des sommets d'un quadrilatère sphérique comme pôles, on décrit des arcs de grand cercle terminés aux côtés du quadrilatère, prolongés dans le même sens. On demande l'aire totale de la figure ainsi obtenue (p. 82, quest. 2).

Soit ABCD le quadrilatère sphérique dont les côtés AB, BC, CD, DA sont prolongés dans le même sens. Nommons A', B', C', D' les angles extérieurs adjacents aux angles A, B, C, D intérieurs ; S la surface du quadrilatère, S' la somme des surfaces des triangles extérieurs déterminés par la construction définie.

En prenant pour unité de surface le triangle trirectangle, et l'angle droit pour unité d'angle, on a, d'après une proposition bien connue,

$$(1) \qquad S = A + B + C + D - 4.$$

En outre, les triangles décrits à l'extérieur du quadrilatère, étant birectangles, ont respectivement pour me-

sures A′, B′, C′, D′; donc

$$(2) \qquad S' = A' + B' + C' + D'.$$

Additionnant les relations (1) et (2), en ayant égard aux égalités $A + A' = 2$, $B + B' = 2$, $C + C' = 2$, $D + D' = 2$, il vient

$$(3) \qquad S + S' = 4.$$

Cette dernière égalité montre que *l'aire totale* de la figure est égale à quatre triangles trirectangles, c'est-à-dire à la moitié de la surface de la sphère à laquelle appartient le quadrilatère considéré (*).

SOLUTION DE LA QUESTION

proposée au concours d'admission à l'École Normale supérieure (1864);

PAR M. DURANTON.

MM. Painvin et Gerono ont résolu, dans le numéro d'août 1864 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la question proposée au dernier concours d'admission à l'École Normale supérieure. Le premier s'appuie, pour une partie du moins de ses calculs, sur une définition qu'on ne trouve point dans les ouvrages élémentaires, le second sur d'ingénieuses considérations géométriques. Nous indiquerons modestement, après deux hommes très-connus, la marche simple qui nous a conduit au résultat,

(*) L'aire totale de la figure est indépendante du nombre des côtés du polygone sphérique considéré. Car la démonstration de M. Al. M. s'applique à un polygone d'un nombre quelconque de côtés, et le résultat obtenu reste le même, quand le nombre des côtés varie. G.

et nous adopterons les notations de M. Painvin, afin d'éviter des redites en renvoyant à sa discussion.

ÉNONCÉ. — *On donne trois points fixes* A, B, C *et une droite fixe* AA′ *passant par le point* A : *trouver le lieu des points de contact des droites parallèles à* AA′ *et tangentes aux coniques passant par les trois points* A, B, C *et touchant la droite* AA′.

Ce lieu est une conique; on demande le lieu des foyers de ces coniques lorsqu'on fait varier la position de la droite AA′.

I.

Nous prendrons pour axes les droites AB, AC et nous désignerons par a et b les distances AB, AC. Soient

$$y = mx, \quad y = mx + \mu, \quad y = \alpha x,$$

les équations de la droite AA′, d'une de ses parallèles HH′ et de la droite AM qui joint les points de contact A et M. L'équation d'une conique tangente en A et en M aux deux droites AA′, HH′ pourra s'écrire

$$(y - mx)(y - mx - \mu) - k(y - \lambda x)^2 = 0.$$

Si l'on exprime que cette équation est satisfaite par les coordonnées des points B et C, on trouvera deux équations dont on déduira très-facilement k et μ en fonction de λ. La valeur de μ est

$$\mu = \frac{ab(\lambda^2 - m^2)}{a\lambda^2 + mb}.$$

La droite HH′ est ainsi représentée par

$$y = mx + \frac{ab(\lambda^2 - m^2)}{a\lambda^2 + mb}.$$

En y joignant l'équation

$$y = \alpha x$$

de AM, on a deux équations dont on pourrait tirer les valeurs des coordonnées x et y du point M en fonction de l'indéterminée λ. L'élimination de λ entre ces deux équations conduit, par la suppression du facteur $y - mx$, à l'équation

$$\frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} - y - mx = 0$$

du lieu du point M. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, l'équation se réduit à

$$(1) \qquad \frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{ma + b}{4} = 0.$$

II.

En second lieu, si l'on désigne par α et ε les coordonnées d'un foyer de la conique, et par θ l'angle $x\mathrm{A}y$ des axes, l'équation de cette conique pourra s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varepsilon)^2 + 2(x - \alpha)(y - \varepsilon)\cos\theta = (fx + hy + l)^2.$$

Si l'on identifie avec l'équation (1), on obtient entre α, ε, f, h, l, cinq équations d'où l'on élimine sans difficulté f, h, l et m; il en résulte pour l'équation du lieu cherché des foyers

$$\alpha\varepsilon(\varepsilon\cos\theta + \alpha)(\alpha\cos\theta + \varepsilon) - \frac{\cos^2\theta}{4}\left(\alpha^2\varepsilon^2 + \frac{a^2 + b^2}{\cos\theta}\alpha\varepsilon + b^2\alpha^2\right) = 0.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Transon à M. Gerono.

« Il me semble qu'on ignore ou tout au moins qu'on n'enseigne pas la signification géométrique que reçoit la fonction du second degré à deux variables lorsqu'on substitue à celles-ci les coordonnées d'un point quelconque du plan. Cette signification donne cependant lieu à un théorème que vous jugerez peut-être assez intéressant pour être proposé aux lecteurs des *Nouvelles Annales*. Voici ce qu'il en est.

» *Soit*

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe du second degré. Si d'un point M, *dont les coordonnées sont* α, β, *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la polaire de ce point et qu'on la prolonge jusqu'en* A *où elle rencontre l'un des axes de la courbe, on trouve que* $f(\alpha, \beta)$ *est proportionnel au produit* MP.MA.

» *Nota.* M. Mannheim me fait remarquer que si A est au petit axe de la courbe, les points P, A, F et F' sont sur un même cercle ; de sorte que $f(\alpha, \beta)$ est une quantité proportionnelle à la puissance du point M relativement à ce cercle. »

Lettre de M. Vincent, Membre de l'Institut.

A Messieurs les Rédacteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

« Messieurs,

» La Note sur le rapport de la circonférence au dia-

mètre, par M. M., que l'on trouve à la page 310 du volume courant (1864), est certainement fort intéressante. Mais votre abonné aurait pu en lire l'équivalent à la page 146 du *Géomètre*, recueil publié en 1836 par M. Guillard. Ou du moins, si la Note du *Géomètre* n'est point l'équivalent de celle de votre abonné, on peut dire qu'elle en est l'analogue.

« La différence des méthodes, dit votre abonné, est » plus apparente que réelle; » l'abonné a raison s'il veut simplement parler des résultats; mais quant à la simplicité des calculs, la méthode des isopérimètres me semble toujours d'une supériorité incontestable. En effet, que peut-on imaginer de plus simple que cet élégant théorème de Schwab, auquel on ne saurait trop rappeler les auteurs d'Éléments?

« Si l'on forme une suite de nombres dont les deux » premiers soient 0 et 1 (*zéro* et *un*) et dont les autres » soient alternativement moyens par différence et moyens » par quotient entre les deux qui précèdent immédiatement, cette suite convergera sans cesse vers le rayon » d'une circonférence égale à 4. »

» Ce théorème est la traduction des formules

$$r' = \frac{R + r}{2}, \quad R' = \sqrt{Rr'},$$

dont une démonstration géométrique extrêmement simple a été donnée dans une Note posthume de feu Léger, chef d'institution à Montmorency, à la page 204 du tome V des *Nouvelles Annales*.

(5 août 1864.)

Les solutions des questions 684, 685, 688 nous ont été adressées par M. L. Cousin (de Catillon); mais elles

nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de juillet dernier, où les mêmes questions ont été résolues.

La proposition 684 est une conséquence toute simple d'un théorème qui n'est pas nouveau, car il est démontré dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital (seconde édition publiée en 1715). Voici en quoi consiste ce théorème :

Soient AC le rayon de courbure en un point A d'une parabole, et AB la projection de AC sur le rayon vecteur FA mené du foyer F au point A : la projection AB est double du rayon vecteur FA.

Il est clair, d'après cela, que les milieux des rayons de courbure aux extrémités A, A′ d'une corde focale quelconque AFA′ appartiennent à la perpendiculaire menée par le foyer à cette corde. Et on sait, d'ailleurs, que la perpendiculaire dont il s'agit rencontre la directrice de la parabole au pôle de la corde focale.

La relation

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

se déduit très-simplement aussi de la proposition due à de l'Hospital. En effet, le triangle rectangle ABC, précédemment défini, donne d'abord

$$AC = \frac{AB}{\cos BAC} \quad \text{ou} \quad R = \frac{2.AF}{\sin \frac{1}{2}\omega},$$

en nommant ω l'angle que le rayon vecteur AF forme avec l'axe de la parabole. Mais

$$AF = \frac{p}{1 - \cos\omega} = \frac{p}{2\sin^2 \frac{1}{2}\omega};$$

donc

$$R = \frac{p}{\sin^3 \frac{1}{2}\omega}.$$

Les normales aux points A, A′ étant rectangulaires, on a

$$R' = \frac{p}{\cos^3 \frac{1}{2}\omega};$$

et de là

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Des égalités

$$R = \frac{p}{\sin^3 \frac{1}{2}\omega}, \quad R' = \frac{p}{\cos^3 \frac{1}{2}\omega},$$

on tire

$$\left(\frac{R}{R'}\right) = \cot^3 \frac{1}{2}\omega,$$

relation indépendante du paramètre de la parabole considérée. G.

DE L'HOMOTHÉTIE DANS LES CONIQUES;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur au lycée Saint-Louis.

Soit

$$f(xy) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation d'une première conique, et soit

$$\varphi(x'y') = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

celle d'une seconde conique semblable et homothétique à la première.

Désignons par α, β les coordonnées du point qui dans le système de la seconde conique est homologue à l'origine.

Nous aurons

$$x' - \alpha = \frac{x}{k}, \qquad y' - \beta = \frac{y}{k},$$

k étant le rapport de similitude de la première conique à la seconde. Il en résulte

$$A'\left(\frac{x}{k}+\alpha\right)^2 + B'\left(\frac{x}{k}+\alpha\right)\left(\frac{y}{k}+\beta\right) + C'\left(\frac{y}{k}+\beta\right)^2 + D'\left(\frac{x}{k}+\alpha\right) + E'\left(\frac{y}{k}+\beta\right) + F' = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} &A'x^2 + B'xy + C'y^2 + k(2A'\alpha + B'\beta + D')x \\ &\quad + k(B'\alpha + 2C'\beta + E')y \\ &\quad + k^2(A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F') = 0. \end{aligned}$$

De là les relations

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} &= \frac{k(2A'\alpha + B'\beta + D')}{D} = \frac{k(B'\alpha + 2C'\beta + E')}{E} \\ &= \frac{k^2(A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F')}{F}. \end{aligned}$$

On a ainsi les deux conditions

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C},$$

puis trois équations pour déterminer α, β et k.

L'élimination de k donne

$$\frac{2A'\alpha + B'\beta + D'}{D} = \frac{B'\alpha + 2C'\beta + E'}{E},$$

$$\frac{A}{A'}\frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}.$$

Si les deux courbes ont un centre, il doit résulter de là deux systèmes de valeurs pour α et β, déterminant deux points symétriques l'un de l'autre à l'égard du centre de la seconde conique, et deux valeurs de k correspondantes, égales et de signes contraires. Mais pour des paraboles, il n'en doit résulter qu'un seul système de valeurs de α, β et k.

C'est chose aisée à établir par l'analyse suivante.

Premier cas.— Soient a et b les coordonnées du centre de la seconde conique, de sorte que

$$2A'a + B'b + D' = 0,$$
$$B'a + 2C'b + E' = 0.$$

Posons

$$\alpha = a + \alpha',$$
$$\beta = b + \beta'.$$

Il s'ensuit

$$2A'\alpha + B'\beta + D' = 2A'\alpha' + B'\beta',$$
$$B'\alpha + 2C'\beta + E' = B'\alpha' + 2C'\beta',$$

et

$$A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'$$
$$= A'\alpha'^2 + B'\alpha'\beta' + C'\beta'^2 + \frac{D'a + E'b}{2} + F',$$

ce qui transforme les deux équations précédentes en

$$\frac{2A'\alpha' + B'\beta'}{D} = \frac{B'\alpha' + 2C'\beta'}{E},$$

$$\frac{A}{A'}\frac{(2A'\alpha' + B'\beta')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha'^2 + B'\alpha'\beta' + C'\beta'^2 + \dfrac{D'a + E'b}{2} + F'}{F}$$

avec

$$k = D \frac{A'}{A} \frac{1}{2A'\alpha' + B'\beta'}.$$

On voit que ces équations déterminent deux couples de valeurs, pour α' et β', égales et de signes contraires, ainsi que des valeurs de k égales aussi et de signes contraires.

Deuxième cas. — Soit

$$B^2 - 4AC = 0$$

avec

$$B'^2 - 4A'C' = 0.$$

L'équation

$$\frac{A}{A'} \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}$$

peut se changer en

$$\frac{A}{A'} \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2}$$

$$= \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + \frac{B'^2}{4A'}\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F},$$

d'où

$$\frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2}$$

$$= \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2 - 2(B'D' - 2A'E')\beta - (D'^2 - 4A'F')}{4AF}$$

$$= \frac{2(B'D' - 2A'E')\beta + D'^2 - 4A'F'}{D^2 - 4AF}.$$

On trouvera d'une façon semblable

$$\frac{(B'\alpha + 2C'\beta + E')^2}{E^2} = \frac{2(B'E' - 2C'D')\alpha + E'^2 - 4C'F'}{E^2 - 4CF}.$$

En conséquence, α et β sont données par les équations

$$\frac{2A'\alpha + B'\beta + D'}{D} = \frac{B'\alpha + 2C'\beta + E'}{E},$$

$$\frac{2(B'D' - 2A'E')\beta + D'^2 - 4A'F'}{D^2 - 4AF}$$

$$= \frac{2(B'E' - 2C'D')\alpha + E'^2 - 4C'F'}{E^2 - 4CF},$$

toutes deux du premier degré.

Il s'ensuit bien pour α, β, k un seul système de valeurs.

QUESTION D'EXAMEN

(voir p. 85, quest. 40);

SOLUTION DE M. A. D'ASTRE
(Institution Barbet).

Décomposer en facteurs réels du second degré l'expression

$$(x^2 + px + q)^2 + 1.$$

Considérons l'expression

$$(x^2 + px + q)^2 + 1$$

comme composée de deux des termes du carré du polynôme

$$x^2 + px + q + 1.$$

Nous l'écrirons alors

$$(x^2 + px + q + 1)^2 - 2(x^2 + px + q).$$

Si $x^2 + px + q$ était un carré parfait, la décomposition serait facile.

On est ainsi amené à introduire une constante λ qu'on déterminera de manière à former une différence de carrés.

Nous écrirons donc l'expression de la manière suivante :

$$(x^2 + px + q + \lambda)^2 - 2\lambda(x^2 + px + q) - \lambda^2 + 1,$$

ou

$$(x^2 + px + q + \lambda)^2 - 2\lambda\left(x^2 + px + \frac{\lambda^2 + 2\lambda q - 1}{2\lambda}\right).$$

Pour que le second terme soit un carré, λ doit satisfaire à la relation

$$(1) \qquad \lambda^2 - \lambda\left(\frac{p^2 - 4q}{2}\right) - 1 = 0,$$

et il est alors le carré de

$$\sqrt{2\lambda}\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

On prendra pour λ la racine positive de l'équation (1), et on connaîtra les deux facteurs réels du second degré que l'on cherchait.

NOTE SUR DES QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE);

PAR UN ABONNÉ.

QUESTION 41, p. 85. — *Résoudre l'équation*

$$2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0,$$

et montrer qu'elle a deux racines réelles.

Il est d'abord évident que cette équation n'admet aucune racine réelle négative. La dérivée du premier membre est $4\cos^2 x$; cette dérivée étant essentiellement positive, la fonction $2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m}$ croît constamment avec x, ce qui montre que l'équation proposée ne peut avoir deux racines réelles.

Pour $x = 0$, le premier membre est négatif; il devient positif pour $x = 1 + \frac{\pi}{m}$; donc l'équation a une racine positive comprise entre 0 et $1 + \frac{\pi}{m}$.

Question 23, p. 84. — *Division d'un polynôme entier $f(x)$ par $x^2 + px + q$. Forme du reste.*

En désignant par $Ax + B$ le reste et par $\varphi(x)$ le quotient, on a

$$(1) \qquad f(x) = (x^2 + px + q)\varphi(x) + Ax + B.$$

Soient α, β les racines de $x^2 + px + q = 0$; les substitutions de α et β à x, dans l'égalité (1), donnent :

$$(2) \qquad f(\alpha) = A\alpha + B,$$

$$(3) \qquad f(\beta) = A\beta + B,$$

d'où

$$(4) \qquad A = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$(5) \qquad B = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Mais

$$f(\beta) - f(\alpha) = f[\alpha + (\beta - \alpha)] - f(\alpha),$$

ou, d'après le théorème de Taylor,

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha).(\beta - \alpha) + \frac{1}{1.2}f''(\alpha)(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3}f'''(\alpha)(\beta - \alpha)^3 + \ldots$$

Donc

$$(6)\quad A = f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha).(\beta - \alpha) + \frac{1}{1.2.3} f'''(\alpha).(\beta - \alpha)^2 + \ldots$$

L'égalité (5)

$$B = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

revient à

$$B = f(\alpha) - \frac{\alpha[f(\beta) - f(\alpha)]}{\beta - \alpha};$$

d'où

$$B = f(\alpha) - \alpha . A,$$

ce qui donne, en remplaçant A par sa valeur (égalité 6),

$$(7)\quad B = f(\alpha) - \alpha\left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha).(\beta - \alpha) + \ldots\right].$$

Par conséquent, le reste de la division considérée est

$$x\left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha).(\beta - \alpha) + \ldots\right]$$
$$+ f(\alpha) - \alpha\left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2}\cdot f''(\alpha).(\beta - \alpha) + \ldots\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(\alpha) + (x - \alpha)\left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha)\ (\beta - \alpha) + \ldots\right].$$

Lorsque les racines α, β de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont égales entre elles, on a

$$\beta - \alpha = 0,$$

et le reste de la division se réduit à

$$f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha).$$

Dans ce cas, le quotient $\varphi(x)$ de la division a pour va-

leur

$$\frac{1}{1.2}f''(\alpha)+\frac{1}{1.2.3}(x-\alpha)f'''(\alpha)+\ldots$$

C'est ce qui résulte évidemment de la formule connue

$$f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)$$
$$+\frac{1}{1.2}(x-\alpha)^2.f''(\alpha)+\frac{1}{1.2.3}(x-\alpha)^3.f'''(\alpha)+\ldots$$

Question 121, p. 183.— *Quand deux angles trièdres trirectangles ont un même sommet, leurs six arêtes sont sur un même cône du second degré.*

Prenons pour axes de coordonnées les trois arêtes de l'un des trièdres; l'équation générale des cônes du second degré, passant par ces trois arêtes, est

$$(1)\qquad Axy+Bxz+Cyz=0,$$

A, B, C représentant des paramètres arbitraires.

Actuellement, nommons α, 6, γ; α', $6'$, γ'; α'', $6''$, γ'', les angles que les trois arêtes du second trièdre forment respectivement avec les axes des coordonnées. Ces arêtes ont pour équations

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos 6}=\frac{z}{\cos\gamma},$$
$$\frac{x}{\cos\alpha'}=\frac{y}{\cos 6'}=\frac{z}{\cos\gamma'},$$
$$\frac{x}{\cos\alpha''}=\frac{y}{\cos 6''}=\frac{z}{\cos\gamma''};$$

et pour qu'elles appartiennent, toutes trois, à l'un des cônes représentés par l'équation (1), il faut qu'il existe pour A, B, C des valeurs satisfaisant à la fois aux trois

équations

$$(2)\quad A\cos\alpha\cos\beta + B\cos\alpha\cos\gamma + C\cos\beta\cos\gamma = 0,$$
$$(3)\quad A\cos\alpha'\cos\beta' + B\cos\alpha'\cos\gamma' + C\cos\beta'\cos\gamma' = 0,$$
$$(4)\quad A\cos\alpha''\cos\beta'' + B\cos\alpha''\cos\gamma'' + C\cos\beta''\cos\gamma'' = 0.$$

Les deux premières déterminent les rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ et par conséquent le cône. Il s'agit donc de faire voir que toute solution des équations (2) et (3) vérifie l'équation (4); autrement dit, il faut prouver que l'une de ces trois équations se déduit des deux autres.

Or, en additionnant membre à membre les trois équations (2), (3), (4) il vient :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & A(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'') \\ & + B(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'') \\ & + C(\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'') \end{aligned}\right\} = 0.$$

Cette dernière est vérifiée quelles que soient les valeurs de A, B, C, car on a :

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0,$$
$$\cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0,$$

puisque $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ représentent les angles que les axes des coordonnées OX, OY, OZ forment avec les trois arêtes rectangulaires du second trièdre.

D'après cela, on voit que toute solution commune à deux quelconques des équations (2), (3), (4) satisfait à la troisième : c'est ce qu'il fallait démontrer.

QUESTION 131, p. 184. — *Étant donnés une surface du second degré et un point fixe, on mène par ce point toutes les cordes dont ce point est le milieu. Lieu de ces droites.*

Soit

$$\begin{aligned}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy\\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,\end{aligned}$$

l'équation de la surface rapportée à un système d'axes quelconques passant par le point donné pris pour origine. Les équations d'une droite menée par ce point sont

$$(1) \qquad x = mz, \quad y = nz,$$

et, pour que cette droite rencontre la surface en deux points également distants de l'origine, il faut que

$$(2) \qquad Cm + C'n + C'' = 0.$$

En éliminant m et n entre les relations (1) et (2), il vient

$$Cx + C'y + C''z = 0;$$

c'est l'équation du lieu cherché.

REMARQUE SUR UNE INTÉGRATION;

PAR M. J. MENTION.

Dans la solution du problème proposé au concours d'agrégation en 1843, insérée au tome IV de ce recueil (*), on intègre l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{2z^2 + \alpha x^2}$$

au moyen d'une équation différentielle linéaire. Elle peut s'intégrer à moins de frais.

(*) Page 317.

Je pose

$$z = tx,$$

ce qui donne

$$dx = \frac{(tdx + xdt)\,t}{2t^2 + \alpha}$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{t^2 + \alpha}.$$

Donc

$$2\,lx = l\,(t^2 + \alpha) + C$$

ou

$$C'\,x^4 = z^2 + \alpha x^2.$$

Note du Rédacteur. — L'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{2z^2 + \alpha x^2}$$

est homogène par rapport aux variables x, z; elle est comprise dans la forme générale

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

où M, N sont des fonctions homogènes de x, y du même degré; quel que soit ce degré, les variables se séparent au moyen du procédé employé dans l'exemple précédent. (Voir *Cours d'Analyse* de Sturm, t. II, p. 41, 2e édition, revue et corrigée par M. Prouhet.) G.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE
d'un problème proposé au concours d'admission à l'École Polytechnique

(voir p. 351);

PAR M. CHOQUET.

La question peut être résolue géométriquement par les propriétés élémentaires des coniques.

Soient F le foyer de la conique (*), LL' sa directrice,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

FA, FB deux rayons vecteurs faisant entre eux l'angle donné 2α, et AM, BM les tangentes aux extrémités A, B de ces rayons vecteurs.

Prolongeons AM jusqu'à sa rencontre avec la directrice LL' en un point R. Menons la droite FR qui sera perpendiculaire à FA, et abaissons sur LL' et FR les perpendiculaires MQ, AP et MH. Nous aurons

$$\frac{MQ}{AP} = \frac{MH}{AF},$$

et en outre

$$MH = MF.\cos\alpha;$$

donc

$$\frac{MQ}{MF} = \frac{AP}{AF}\cos\alpha.$$

Il suit de là que le lieu des points M est une conique qui a même foyer et même directrice que la conique donnée.

QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES ET DES COLLÉGES (CLASSE DE PHILOSOPHIE);

Solution de M. J. MOUCHEL,
Conducteur des Ponts et Chaussées, à Amiens.

Énoncé. — *Étant donné un triangle* ABC, *on demande de mener par le point* C *une droite* CD *telle, que la somme des projections des côtés* AC *et* BC *sur cette droite soit égale à une longueur donnée. Discuter le problème.*

Résoudre le même problème par la Trigonométrie.

1° *Solution géométrique.* — Supposons pour un in-

stant le problème résolu, et soient A', B' les projections de A, B sur CD, on aura

$$A'B' = m,$$

longueur donnée (*). Par le point B, menons BM parallèle à CD et rencontrant AA' en M. On a

$$BM = A'B' = m.$$

De plus nous remarquerons que l'angle AMB étant droit, le point M se trouve sur la circonférence décrite sur AB comme diamètre. Il est d'ailleurs sur la circonférence décrite du point B comme centre avec BM comme rayon. De là cette construction :

Décrivez une circonférence sur AB comme diamètre. De l'une des extrémités B du diamètre AB, avec un rayon BM égal à m, décrivez une seconde circonférence qui coupe la première en deux points M et M'; tirez les droites BM, BM', et par le point C menez à ces droites les parallèles CD, CD' qui satisfont évidemment à la question.

Les droites BM et BM' étant symétriques par rapport à AB, CD et CD' sont symétriques par rapport à la parallèle à AB menée par le point C, et aussi par rapport à la perpendiculaire CH abaissée du point C sur AB.

Le problème a généralement deux solutions; il n'en a qu'une lorsque la longueur donnée est nulle, ou bien lorsqu'elle est égale à AB.

La corde BM ne pouvant jamais surpasser le diamètre AB, il en résulte que AB est la plus grande valeur que puisse prendre la somme des projections des côtés AC, BC du triangle ABC, et, pour que le problème soit pos-

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

sible, il faut que la longueur donnée soit égale ou inférieure à AB.

D'ailleurs, la somme des projections des côtés AC et BC peut prendre toutes les valeurs entre o et AB.

2° *Solution trigonométrique.* — La construction faite pour la solution géométrique conduit très-simplement à la solution trigonométrique. En effet, la position de la droite CD est déterminée par l'angle qu'elle fait avec la perpendiculaire CH abaissée du point C sur AB, et rencontrant BM en un point I.

Appelons x cet angle BIH, et désignons par c le côté AB. Nous remarquerons que l'angle

$$\text{BAM} = \text{BIH} = x.$$

D'ailleurs le triangle rectangle MAB donne

$$c \sin \text{MAB} = \text{BM}$$

ou

$$c \sin x = m.$$

De là cette nouvelle construction :

Portez sur AB, à partir du point H, la longueur $\text{HK} = m$; élevez KL perpendiculaire à AB. Du point C comme centre, avec AB comme rayon, décrivez une circonférence qui coupe généralement KL en deux points D et D'; joignez enfin CD et CD'. Ce sont les droites demandées.

A l'inspection de la figure, on aperçoit les mêmes conditions de possibilité et de maximum que précédemment.

Solution directe. — On peut résoudre directement la question par la Trigonométrie, sans passer par la solution géométrique.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle ABC. Du point C abaissons la perpendiculaire CH sur AB, et dé-

signons par γ, γ' et x les angles BCH, ACH et HCD. Nous avons, d'après l'énoncé du problème,

$$(1) \qquad a\cos(x-\gamma) - b\cos(x+\gamma') = m.$$

Développons, il vient

$$(2)\ a(\cos x\cos\gamma + \sin x\sin\gamma) - b(\cos x\cos\gamma' - \sin x\sin\gamma') = m.$$

D'ailleurs

$$\cos\gamma = \sin B, \quad \cos\gamma' = \sin A,$$
$$\sin\gamma = \cos B, \quad \sin\gamma' = \cos A,$$

et la relation (2) devient

$$a(\cos x\sin B + \sin x\cos B) - b(\cos x\sin A - \sin x\cos A) = m$$

ou

$$(3)\ \cos x(a\sin B - b\sin A) + \sin x(a\cos B + b\cos A) = m.$$

Le multiplicateur de $\cos x$ est nul, le multiplicateur de $\sin x$ est égal à c, et la relation (3) devient

$$c\sin x = m,$$

résultat déjà obtenu.

SOLUTION D'UNE QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE);

Par M. Auguste GROUARD.

Démontrer géométriquement que le lieu représenté par l'équation

$$\rho = m\sin\omega + n\cos\omega$$

est un cercle.

Du pôle O comme centre, je décris un cercle de rayon n. Ce cercle rencontre l'axe polaire en A.

Soit OK un rayon faisant avec OA un angle ω. Je prends sur ce rayon une longueur OK égale à

$$m \sin\omega + n \cos\omega.$$

Chaque point K est un point du lieu.

Cela posé, du point A j'abaisse une perpendiculaire AM sur OK

$$\text{AM} = n \sin\omega \quad \text{et} \quad \text{OM} = n \cos\omega.$$

D'où

$$\text{MK} = \text{OK} - \text{OM} = m \sin\omega.$$

Donc

$$\text{tang AKM} = \frac{\text{AM}}{\text{MK}} = \frac{n}{m}.$$

L'angle OKA est constant; donc le lieu de K est un cercle.

Remarque. — Si $n = m$, l'angle en K est de 45 degrés.

NOTE SUR CERTAINES LIMITES DES RACINES DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. S. REALIS.

Un polynôme $f(x)$ rationnel et entier par rapport à x étant donné, désignons par X l'ensemble de tous les termes de degré pair qu'il contient, y compris le terme indépendant de x, et posons $X = 0$. Admettons que cette équation soit vérifiée par $x^2 = a^2$, a^2 étant un nombre positif quelconque; on en conclura tout de suite que les substitutions $x = a$ et $x = -a$ dans $f(x)$ doivent donner des résultats égaux et de signes contraires. Il suit de là que si

l'on pose $f(x)=0$, cette dernière équation aura nécessairement une racine comprise entre $+a$ et $-a$, et à plus forte raison entre $+l$ et $-l$, l^2 étant une limite supérieure des racines positives a^2 dans $X=0$.

Cette considération, d'une simplicité rudimentaire, peut être souvent d'une grande utilité pour diriger les essais relatifs à la séparation des racines. On voit, en particulier, que toutes les fois que le premier terme de degré pair d'une équation donnée est de signe contraire au terme tout connu, il est possible d'assigner deux limites, généralement différentes des limites supérieure et inférieure de toutes les racines, et plus faciles à déterminer, lesquelles comprendront nécessairement une ou plusieurs racines de la proposée.

Les propositions qui suivent sont des applications immédiates du principe qu'on vient d'énoncer.

I. L'équation

$$x^{2n}+p_1x^{2n-1}+p_2x^{2n-2}+\dots+p_{2n-2}x^2+p_{2n-1}x-p_{2n}=0,$$

dans laquelle tous les termes de degré pair sont positifs et le dernier terme $-p_{2n}$ est négatif (un ou plusieurs des termes intermédiaires pouvant d'ailleurs être nuls), a au moins une racine comprise entre les limites

$$+\sqrt[2n]{p_{2n}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2n]{p_{2n}}.$$

Et, plus généralement, si A désigne la plus petite des n quantités

$$\sqrt[2n]{p_{2n}},\quad \sqrt[2n-2]{\frac{p_{2n}}{p_2}},\dots,\quad \sqrt[2n-2k]{\frac{p_{2n}}{p_{2k}}},\dots,\quad \sqrt{\frac{p_{2n}}{p_{2n-2}}},$$

l'équation aura au moins une racine comprise entre $+A$ et $-A$.

II. L'équation

$$x^{2n+1}+p_1x^{2n}+p_2x^{2n-1}+\dots+p_{2n-1}x^2+p_{2n}x-p_{2n+1}=0,$$

dans laquelle tous les termes de degré pair sont de signe contraire au dernier terme $-p_{2n+1}$, a au moins une racine comprise entre les limites

$$+\sqrt[2n]{\frac{p_{2n+1}}{p_1}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2n]{\frac{p_{2n+1}}{p_1}},$$

(ou, plus généralement, entre

$$+\sqrt[2n-2k]{\frac{p_{2n+1}}{p_{2k+1}}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2n-2k]{\frac{p_{2n+1}}{p_{2k+1}}};$$

$p_{2k+1}x^{2n-2k}$ étant un terme quelconque de degré pair).

III. Étant donnée l'équation de degré pair

$$x^{2n}+p_1x^{2n-1}+p_2x^{2n-2}+\ldots+p_{2n-1}x-p_{2n}=0,$$

dont le dernier terme est un nombre négatif et les coefficients intermédiaires sont des nombres réels quelconques, considérons les termes négatifs de degré pair $-p_{2a}x^{2n-2a}$, $-p_{2b}x^{2n-2b}$, $-p_{2c}x^{2n-2c},\ldots,$ $-p_{2n}$, et désignons par A et B les deux plus grandes valeurs que prend l'expression $\sqrt[2k]{p_{2k}}$ quand on y fait successivement k égal à a, b, $c,\ldots,n$. L'équation aura au moins une racine comprise entre $+(A+B)$ et $-(A+B)$.

IV. Étant donnée l'équation de degré impair

$$x^{2n+1}+p_1x^{2n}+p_2x^{2n-1}+\ldots+p_{2n}x-p_{2n+1}=0,$$

où les coefficients sont des nombres réels quelconques et le terme tout connu est de signe contraire au premier terme de degré pair $\left(\frac{-p_{2n+1}}{p_1}<0\right)$, considérons les termes de degré pair $-p_{2a+1}x^{2n-2a}$, $-p_{2b+1}x^{2n-2b}$, $-p_{2c+1}x^{2n-2c},\ldots,$ $-p_{2n+1}$, qui ont même signe que le dernier terme, et soient A et B les deux plus grandes va-

leurs que prend l'expression $\sqrt[2k]{\frac{p_{2k+1}}{p_1}}$ quand on y donne à k les valeurs successives $a, b, c, \ldots, n$. L'équation aura au moins une racine entre $+(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et $-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

Si $p_1 = 0$, soit $p_{2k+1}x^{2n-2k}$ le premier terme de degré pair (qu'on suppose toujours de signe contraire au dernier terme de l'équation), et désignons par A′ et B′ les deux plus grandes valeurs de $\sqrt[2k-2h]{\frac{p_{2k+1}}{p_{2h+1}}}$ pour $k = a, b, c, \ldots, n$. Les nombres $+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$ et $-(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$ intercepteront au moins une racine de l'équation.

Remarque. — Le cas où le dernier terme de l'équation du degré $2n+1$ ne serait pas de signe contraire au premier terme de degré pair se ramène immédiatement au cas qu'on vient de traiter. Il suffit pour cela de multiplier l'équation par un facteur réel du second degré, lequel peut toujours être choisi de manière que la condition requise soit remplie, et que les nouvelles racines qu'on introduit soient imaginaires.

RECTIFICATION.

Question 81 *d'examen* (*École Polytechnique*).

Page 179, ligne 2, *au lieu de* MI = MN, *lisez* MI = IT.

NOTE
sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre;

PAR M. L. PAINVIN.

I.

1. Le *foyer* d'une courbe plane du second ordre est le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la courbe; la corde de contact est la *directrice* correspondant à ce foyer. (Cette définition est la *traduction analytique* de la définition ordinaire des foyers.)

Soient α, β, γ les coordonnées d'un foyer de la section faite dans la surface du second ordre

$$(S) \qquad f(x, y, z) = 0$$

par le plan

$$(P) \qquad mx + ny + pz = q;$$

si nous imaginons une sphère de rayon nul ayant son centre en (α, β, γ) sur le plan (P), l'équation de cette sphère sera (en supposant les axes rectangulaires)

$$(\Sigma) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0;$$

et les sections des surfaces (S) et (Σ) par le plan (P) devront être doublement tangentes. On exprimera que cette propriété a lieu, en écrivant que les projections des deux courbes sur un des plans coordonnés sont doublement tangentes. Tel est le principe qu'on peut adopter pour la détermination des foyers d'une section plane.

2. On simplifiera cette recherche en opérant comme il suit :

Transportons les axes au point (α, β, γ), c'est-à-dire posons

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma;$$

les équations de la surface et de la sphère deviennent respectivement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' \\ \qquad + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0;$$

et, si l'on tient compte de la relation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = q$$

qui exprime que le centre (α, β, γ) est sur le plan sécant (P), l'équation de ce plan est

$$(3) \quad mx' + ny' + pz' = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que les projections, sur un des plans coordonnés, des courbes obtenues en coupant les surfaces (1) et (2) par le plan (3) sont doublement tangentes.

Or remarquons que la corde de contact des deux courbes ou la directrice correspondant au foyer (α, β, γ) se trouve dans le plan polaire du point (α, β, γ), c'est-à-dire dans le plan

$$xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma + f'_\delta = 0,$$

ou, dans le nouveau système de coordonnées,

$$x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + 2f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Ainsi la directrice correspondant au foyer (α, β, γ) a

pour équations

$$\left\{\begin{array}{l} mx' + ny' + pz' = 0, \\ x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + 2f(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \end{array}\right.$$

Mais cette droite est la corde de contact des deux courbes; on devra donc pouvoir satisfaire à l'identité

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'y'z' + 2B''x'y' \\ \quad + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + f(\alpha, \beta, \gamma) \\ \quad + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ = k[x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + 2f(\alpha, \beta, \gamma)]^2, \end{array}\right.$$

en tenant compte de la relation

$$(5)\qquad mx' + ny' + pz' = 0;$$

λ et k sont des constantes arbitraires.

En égalant les termes indépendants, nous trouvons d'abord

$$k = \frac{1}{4f(\alpha, \beta, \gamma)},$$

et l'on voit que l'identité (4) se réduit à

$$4f(\alpha, \beta, \gamma)\left[\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' \\ \quad + 2B''x'y' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \end{array}\right] = [x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma]^2.$$

3. « Donc, en résumé, étant donnée la surface du se-
» cond ordre

$$(S)\quad f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

» on obtiendra les coordonnées (α, β, γ) des foyers de la
» section faite dans cette surface par le plan

$$(P)\qquad mx + ny + pz = q,$$

» en écrivant qu'on a identiquement

$$\text{(I)}\quad 4f(\alpha,\beta,\gamma)\begin{bmatrix} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' \\ + 2B''x'y' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \end{bmatrix} = [x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma]^2,$$

» après avoir remplacé dans cette équation l'une des » variables x', y' ou z' par sa valeur déduite de la re- » lation

$$\text{(II)}\qquad mx' + ny' + pz' = 0.$$

» On obtiendra ainsi trois équations de condition ; on en » déduira, par l'élimination de l'indéterminée λ, deux » équations entre α, β, γ, lesquelles, jointes à la relation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = q,$$

» permettront de déterminer les foyers de la section. »

Dans le cas des axes obliques, il faudrait prendre pour point de départ l'identité

$$4f(\alpha,\beta,\gamma)\left\{\begin{matrix} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' \\ + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\widehat{yz} \\ + 2x'z'\cos\widehat{xz} + 2x'y'\cos\widehat{xy}) \end{matrix}\right\} = [x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma]^2.$$

Remarque. — Si, dans l'application de la règle que je viens d'énoncer, on remplaçait successivement les trois variables x', y', z', on arriverait ainsi à *neuf* relations dont *trois* seulement seraient distinctes ; on pourra profiter de la multiplicité de ces relations pour choisir parmi elles trois relations distinctes et symétriques, et faciliter par là l'élimination.

II.

4. J'appliquerai cette méthode à la question suivante :

Trouver le lieu des foyers des sections centrales faites dans une surface du second ordre.

Prenons pour exemple l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

D'après la règle précédente, il faudra exprimer que l'on a identiquement

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left[\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}+\lambda\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right]$$
$$=\left(\frac{\alpha x'}{a^2}+\frac{\beta y'}{b^2}+\frac{\gamma z'}{c^2}\right)^2,$$

en tenant compte de la relation

$$mx'+ny'+pz'=0.$$

Posons

$$\mathrm{H}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1,$$

et éliminons z' : on devra avoir identiquement

$$\mathrm{H}\left\{p^2\frac{x'^2}{a^2}+p^2\frac{y'^2}{b^2}+\frac{(mx'+ny')^2}{c^2}\right.$$
$$\left.+\lambda\left[p^2x'^2+p^2y'^2+(mx'+ny')^2\right]\right\}$$
$$=\left[\frac{p\alpha x'}{a^2}+\frac{p\beta y'}{b^2}-\frac{\gamma}{c^2}(mx'+ny')\right]^2.$$

De là on conclut les trois relations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&H\left[\frac{p^2}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}+\lambda(p^2+m^2)\right]=\left(\frac{p\alpha}{a^2}-\frac{m\gamma}{c^2}\right)^2,\\
&H\left[\frac{p^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}+\lambda(p^2+n^2)\right]=\left(\frac{p\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}\right)^2,\\
&2H\left(\frac{mn}{c^2}+\lambda mn\right)=2\left(\frac{p\alpha}{a^2}-\frac{m\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{p\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}\right);\\
&\text{et l'on a en outre}\\
&\qquad m\alpha+n\beta+p\gamma=0;
\end{aligned}
\right.
$$

on obtiendra l'équation du lieu cherché en éliminant λ, m, n, p entre les quatre équations (1).

5. Je multiplie d'abord les trois premières de ces relations respectivement par α^2, β^2, $\alpha\beta$ et je les ajoute en ayant égard à la quatrième. On trouve, toutes réductions faites,

$$
(2)\qquad \lambda H(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=H+1.
$$

Maintenant je développe les deux premières des relations (1), et je substitue au système (1) le suivant

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&m^2\left(\frac{H}{c^2}+\lambda H-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2mp\,\frac{\alpha\gamma}{a^2c^2}+p^2\left(\frac{H}{a^2}+\lambda H-\frac{\alpha^2}{a^4}\right)=0,\\
&n^2\left(\frac{H}{c^2}+\lambda H-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2np\,\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}+p^2\left(\frac{H}{b^2}+\lambda H-\frac{\beta^2}{b^4}\right)=0,\\
&m^2\left(\frac{H}{b^2}+\lambda H-\frac{\beta^2}{b^4}\right)+2mn\,\frac{\alpha\beta}{a^2b^2}+n^2\left(\frac{H}{a^2}+\lambda H-\frac{\alpha^2}{a^4}\right)=0,\\
&\qquad m\alpha+n\beta+p\gamma=0.
\end{aligned}
\right.
$$

La troisième relation de ce groupe se déduit des trois premières du groupe (1) en les ajoutant après les avoir respectivement multipliées par n^2, m^2, $-mn$, ou bien

s'obtient à l'aide de l'identité prise comme point de départ en éliminant y' au lieu de z'.

Ces préparations faites, je remplace α, β, γ par x, y, z, et je pose

$$m = \frac{M}{a}, \quad n = \frac{N}{b}, \quad p = \frac{P}{c},$$

puis

$$(4) \quad \begin{cases} A = H(1 + \lambda a^2) - \dfrac{x^2}{a^2}, \\ B = H(1 + \lambda b^2) - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ C = H(1 + \lambda c^2) - \dfrac{z^2}{c^2}; \end{cases}$$

les relations du groupe (3) prendront alors la forme

$$(5) \quad \begin{cases} CN^2 + 2NP\dfrac{yz}{bc} + BP^2 = 0, \\ AP^2 + 2PM\dfrac{xz}{ac} + CM^2 = 0, \\ BM^2 + 2MN\dfrac{xy}{ab} + AN^2 = 0, \\ M\dfrac{x}{a} + N\dfrac{y}{b} + P\dfrac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

Rappelons-nous qu'on a

$$(6) \quad \begin{cases} H = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1, \\ \lambda H(x^2 + y^2 + z^2) = H + 1. \end{cases}$$

6. Il suffit maintenant d'éliminer M, N, P entre les trois premières des relations (5), puisque la valeur de λ est connue. Avant d'effectuer cette élimination, je donnerai à ces relations une autre forme en les ajoutant deux par deux et en tenant compte de la quatrième relation;

on obtient ainsi les équations

$$(7)\quad \begin{cases} \left(B + C - 2\dfrac{x^2}{a^2}\right) M^2 + AN^2 + AP^2 = 0, \\ BM^2 + \left(A + C - 2\dfrac{y^2}{b^2}\right) N^2 + BP^2 = 0, \\ CM^2 + CN^2 + \left(A + B - 2\dfrac{z^2}{c^2}\right) P^2 = 0. \end{cases}$$

Le résultat de l'élimination de M^2, N^2, P^2 entre ces trois équations est

$$(8)\quad \begin{vmatrix} B + C - 2\dfrac{x^2}{a^2} & A & A \\ B & A + C - 2\dfrac{y^2}{b^2} & B \\ C & C & A + B - 2\dfrac{z^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée se présente, après quelques réductions, sous la forme suivante

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{A + B + C}{2}\left[\begin{array}{l} A\dfrac{x^2}{a^2} + B\dfrac{y^2}{b^2} + C\dfrac{z^2}{c^2} \\ -2\left(\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + \dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right) \end{array}\right] \\ + A\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + B\dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + C\dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + 2\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} - ABC = 0. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que le coefficient de $\dfrac{A + B + C}{2}$ est nul; car, en ayant égard aux valeurs (4) de A, B, C et aux relations (6), on a

$$A\frac{x^2}{a^2} + B\frac{y^2}{b^2} + C\frac{z^2}{c^2} - 2\left(\frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \frac{x^3 z^2}{a^2 c^2} + \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right)$$
$$= H(H + 1) + \lambda H(x^2 + y^2 + z^2) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2$$
$$= H(H + 1) + H + 1 - (H + 1)^2$$
$$= 0.$$

Ainsi l'équation (9) se réduit à

$$(10)\quad \mathrm{ABC} - \left(\mathrm{A}\frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \mathrm{B}\frac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + \mathrm{C}\frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right) - 2\frac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} = 0.$$

Or, cetté dernière équation devient, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs (4),

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{H}^3(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2) \\
-\mathrm{H}^2\left[\begin{array}{r}(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{x^2}{a^2} + (1+\lambda a^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{y^2}{b^2} \\ +(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)\dfrac{z^2}{c^2}\end{array}\right] \\
+\mathrm{H}\left[(1+\lambda a^2)\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + (1+\lambda b^2)\dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + (1+\lambda c^2)\dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right] \\
\qquad -\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} - 2\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} \\
-\mathrm{H}\left[(1+\lambda a^2)\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + (1+\lambda b^2)\dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + (1+\lambda c^2)\dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right] \\
\qquad +3\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^4}
\end{array}\right\} = 0.$$

Les réductions sont évidentes, et il reste

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{H}^3(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2) \\
-\mathrm{H}^2\left\{\begin{array}{l}(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{x^2}{a^2} \\ +(1+\lambda a^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{y^2}{b^2} \\ +(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)\dfrac{z^2}{c^2}\end{array}\right\}
\end{array}\right\} = 0.$$

Après quelques transformations faciles, l'équation (11) peut s'écrire

$$\begin{array}{c}
\lambda^3\mathrm{H}^3 a^2 b^2 c^2 - \lambda^2\mathrm{H}^3(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \\
-\lambda^2\mathrm{H}^2(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) + \lambda\mathrm{H}(a^2 + b^2 + c^2) + \mathrm{H} = 0,
\end{array}$$

ou enfin

$$(12)\left\{\begin{array}{r}\lambda^2 H^2 (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)\\ -(H+1) - (a^2\lambda H - 1)(b^2\lambda H - 1)(c^2\lambda H - 1) = 0.\end{array}\right.$$

Si maintenant on remplace λH par sa valeur (6), on obtient l'équation définitive

$$(\Sigma)\ (I)\left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\\ \times\left[\begin{array}{r}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\\ -(x^2+y^2+z^2)^2\end{array}\right]\\ -\left[a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]\\ \times\left[b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]\\ \times\left[c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]\end{array}\right\}=0,$$

équation qu'on peut encore écrire

$$(\Sigma)\ (II)\left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\\ \times\left[\begin{array}{r}(b^2-c^2)^2\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+(c^2-a^2)^2\frac{x^2z^2}{a^2c^2}\\ +(a^2-b^2)^2\frac{x^2y^2}{a^2b^2}\end{array}\right]\\ -\left[(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}\right]\\ \times\left[(b^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}+(b^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}\right]\\ \times\left[(c^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}+(c^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right]\end{array}\right\}=0.$$

Telle est l'*équation de la surface lieu des foyers des sections centrales dans l'ellipsoïde.*

On obtiendra l'équation de cette surface dans le cas des hyperboloïdes par le changement de c^2 en $-c^2$ ou de b^2 et c^2 en $-b^2$ et $-c^2$.

7. La surface Σ est du *huitième ordre;* l'origine, c'est-à-dire le centre de la surface du second degré, est un *point sextuple.* Les tangentes proprement dites en ce point sont situées dans les six plans donnés par les termes du sixième degré dans l'équation (II), et ces tangentes ont un contact du second ordre. Les six plans forment trois groupes de deux plans, et il est important de remarquer que ces systèmes de deux plans sont précisément les *plans cycliques* de la surface du second ordre; donc, quelle que soit la surface considérée, *un seul système est réel.*

La section de la surface par un plan quelconque passant par l'origine est une courbe du huitième ordre possédant un point sextuple à l'origine; parmi les six tangentes de ce point sextuple deux seulement sont réelles; ce sont les intersections des plans cycliques réels par le plan sécant.

Les axes de la surface du second ordre sont des *droites doubles* de la surface Σ; nous verrons plus loin que ces droites sont *isolées.* Les plans tangents à la surface à l'origine et menés suivant une de ces droites doubles sont les plans cycliques passant par cette droite.

Sur la surface Σ se trouvent encore les quatre droites imaginaires, intersections des deux surfaces

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0; \end{cases}$$

ce fait est mis en évidence par l'équation (I).

Chaque plan cyclique coupe la surface suivant *huit droites : deux* se confondent avec l'axe par lequel passe le plan cyclique considéré; les *six* autres sont imaginaires et forment deux groupes de trois droites coïncidentes; ces deux droites distinctes et triples sont les intersections du plan cyclique avec le cône imaginaire

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

ou, ce qui revient au même, deux des génératrices communes aux deux cônes

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0. \end{array}\right.$$

Ainsi chaque plan cyclique coupe la surface suivant huit droites formant trois droites distinctes, une droite double et deux droites triples.

Une droite quelconque située dans un plan cyclique et passant par l'origine rencontre la surface en huit points confondus avec cette origine.

Les *directions asymptotiques* sont distribuées sur les trois cônes

$$(\text{I}^\circ) \qquad x^2+y^2+z^2=0,$$

$$(\text{II}^\circ) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$(\text{III}^\circ) \quad (b^2-c^2)^2\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+(c^2-a^2)^2\frac{x^2z^2}{a^2c^2}+(a^2-b^2)^2\frac{x^2y^2}{a^2b^2}=0.$$

Ces trois cônes, qui ont pour sommet le centre de la surface du second ordre, ne déterminent pas seulement les directions asymptotiques, mais ils sont, en outre, asymptotes à la surface Σ; ce sont les enveloppes des plans touchant la surface à l'infini.

Le cône (I°) est un cône imaginaire ou une sphère de rayon nul; la présence de ce facteur nous montre que la surface Σ passe par le cercle imaginaire à l'infini et qu'elle est circonscrite à la sphère de rayon nul ayant pour centre celui de la surface du second degré; le plan de la courbe de contact (courbe imaginaire) est à l'infini.

Les deux autres cônes sont imaginaires dans le cas de l'ellipsoïde, et alors la surface Σ n'a pas de points réels à l'infini; mais ces deux cônes sont réels dans le cas des hyperboloïdes.

Le cône (II°) est le cône asymptote de la surface du second ordre.

Le cône (III°) est un cône du quatrième ordre passant par les axes de la surface du second degré; ces axes sont des arêtes doubles du cône.

Les trois points à l'infini situés sur les droites Ox, Oy, Oz sont des *points doubles* de la surface Σ; les tangentes proprement dites en ces points à l'infini sont situées dans les plans :

$$(a^2-b^2)^2\frac{y^2}{b^2}+(a^2-c^2)^2\frac{z^2}{c^2}=0,$$

pour le point à l'infini sur Ox;

$$(b^2-c^2)^2\frac{z^2}{c^2}+(b^2-a^2)^2\frac{x^2}{a^2}=0,$$

pour le point à l'infini sur Oy;

$$(c^2-a^2)^2\frac{x^2}{a^2}+(c^2-b^2)^2\frac{y^2}{b^2}=0,$$

pour le point à l'infini sur Oz.

(Je n'entrerai pas dans les détails de la détermination de ces plans; ces calculs appartiennent à la théorie de la

recherche des points à l'infini sur les surfaces, que je développerai plus tard.)

Ces trois systèmes de deux plans sont imaginaires dans le cas de l'ellipsoïde; deux seulement sont réels et sont toujours réels dans le cas des hyperboloïdes.

Le cône (III°) passe par les quatre génératrices communes aux cônes (I°) et (II°), car l'équation du cône (III°) peut s'écrire

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

8. Ces quelques remarques générales étant faites, nous nous formerons une idée plus complète de la surface Σ en étudiant ses sections planes.

Je n'examinerai que la surface correspondant au cas de l'ellipsoïde et je me contenterai d'indiquer les résultats. Nous supposerons

$$a > b > c.$$

Le plan des yz coupe la surface suivant les deux droites doubles Oz et Oy, et suivant la courbe du quatrième ordre

$$(y^2 + z^2)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + (a^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} + (a^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0,$$

courbe imaginaire.

Le plan des xz coupe la surface suivant les deux droites doubles Ox et Oz, et suivant la courbe du quatrième ordre

$$(x^2 + z^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + (b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} + (b^2 - a^2)\frac{x^2}{a^2} = 0,$$

courbe réelle ayant un point double réel à l'origine.

Le plan des xy coupe la surface suivant les deux droites doubles Ox et Oy, et suivant la courbe du quatrième

ordre

$$(x^2+y^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left[(a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}+(b^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}\right]=0,$$

courbe réelle et fermée ayant un point double isolé à l'origine.

Un plan perpendiculaire à l'axe des x coupe la surface suivant une courbe du huitième ordre ayant un point double sur l'axe Ox, et les axes de la courbe sont parallèles à Oy et à Oz. Désignons par F_1, F_2, F_3 les foyers des sections principales (yz), (xz), (xy) dans la surface du second ordre. Lorsque le plan sécant coïncide avec yz, on a le segment de droite OF_1 ; lorsqu'il s'en éloigne un peu, le point double de la courbe est isolé, l'axe parallèle à Oy possède deux sommets réels ainsi que l'axe parallèle à Oz, mais la longueur de l'axe parallèle à Oy a une valeur finie peu différente de OF_1, tandis que celle de l'axe parallèle à Oz est très-petite. Le plan sécant s'éloignant de yz, ces deux axes croissent puis décroissent (il peut arriver néanmoins que l'axe parallèle à Oy décroisse constamment) ; le point double est toujours isolé. Quand le plan sécant passe par le point F_3

$$(OF_3=\sqrt{a^2-b^2}),$$

l'axe parallèle à Oz devient nul, et l'axe parallèle à Oy a une valeur finie inférieure à OF_1. A partir de cette position, le point double devient réel, l'axe parallèle à Oz est imaginaire et l'axe parallèle à Oy est seul réel. Enfin, lorsque le plan sécant arrive au point F_2

$$(OF_2=\sqrt{a^2-c^2}),$$

l'axe parallèle à Oy devient nul ; au delà, les sections sont imaginaires. Ainsi, lorsque le plan sécant se meut en partant du plan des yz, on a un ovale très-aplati

dans le sens Oy, puis cet ovale s'élargit; le plan passant par le point F_3, la courbe se présente sous la forme de deux ovales qui se touchent en F_3, la tangente commune est parallèle à Oz; à partir du point F_3, la section prend la forme d'une boucle, le point double est sur Ox et les sommets réels sont sur l'axe parallèle à Oy; enfin la courbe se réduit à un point réel, lorsque le plan sécant passe par le foyer F_2.

J'ai insisté un peu sur les sections parallèles au plan des yz, parce qu'elles nous permettent de saisir plus facilement la forme singulière que présente la surface Σ aux environs de l'axe Ox.

Un plan quelconque parallèle au plan des xz coupe la surface suivant des courbes du huitième ordre ayant un point double *non isolé* sur l'axe Oy; cette courbe a deux sommets réels sur l'axe parallèle à Ox; l'axe parallèle à Oz est toujours imaginaire.

Un plan parallèle au plan des xy coupe la surface suivant une courbe du huitième ordre ayant un point double *isolé* sur l'axe Oz; cette courbe n'a pas de sommet réel sur l'axe parallèle à Oy, sauf le cas où le plan sécant vient coïncider avec le plan des xy. Lorsque ce plan s'élève au-dessus du plan xy, on trouve d'abord *quatre* sommets réels sur l'axe parallèle à Ox; puis les sommets se réduisent à deux, et enfin la courbe devient imaginaire.

Occupons-nous maintenant des sections par des plans passant par les axes Ox, Oy, Oz.

Un plan quelconque passant par l'axe Oz coupe la surface Σ suivant la droite double Oz et suivant une courbe du sixième ordre ayant un point quadruple à l'origine; ce point quadruple ne possède que deux tangentes réelles qui sont les intersections des plans cycliques réels par le plan sécant; l'axe réel de la courbe de section est l'intersection du plan sécant avec le plan des xy. Si l'on

imagine le plan sécant d'abord très-voisin du plan zOx, la courbe présentera un point double à l'origine et deux sommets réels situés sur la section de la surface Σ par le plan xOy; lorsque le plan sécant se rapprochera du plan zOy, la courbe de section s'aplatira de plus en plus et se réduira, à la limite, à la droite $F_1OF'_1$, F_1 et F'_1 étant les foyers de la section principale de l'ellipsoïde par le plan zOy.

Imaginons maintenant un plan tournant autour de l'axe Oy. L'intersection de la surface par ce plan est imaginaire tant que l'inclinaison du plan sécant sur le plan xOy est supérieure à celle du plan cyclique (nous faisons abstraction de la droite double Oy). Lorsque le plan sécant vient se placer sur le plan cyclique, la section se compose de droites passant par l'origine, comme nous l'avons vu; enfin, lorsque l'angle du plan sécant est moindre que celui du plan cyclique, on a une courbe du sixième ordre réelle et fermée, possédant un point quadruple isolé à l'origine; cette courbe se réduit au quatrième ordre quand le plan vient coïncider avec le plan des xy.

Un plan tournant autour de l'axe Ox coupe la surface Σ suivant une courbe du sixième ordre ayant un point quadruple à l'origine pour lequel deux tangentes seulement sont réelles. Le plan sécant étant d'abord voisin du plan zOx, puis s'éloignant de ce dernier plan, les deux tangentes réelles au point quadruple font un angle fini, puis cet angle diminue, et les deux tangentes viennent se confondre avec l'axe Oy lorsque le plan sécant coïncide avec xOy. La courbe du sixième ordre se décompose alors en la droite double Oy et en une courbe du quatrième ordre fermée ayant un point double isolé à l'origine.

9. La question que nous venons de résoudre donne lieu à la suivante, lorsque la surface considérée devient un paraboloïde :

Trouver le lieu des foyers des sections par des plans parallèles à l'axe de la surface.

On pourrait déduire des résultats précédents la solution de cette question, mais il est plus simple de l'aborder directement. On trouve ainsi pour le lieu des foyers des sections paraboliques une surface du quatrième ordre dont l'équation est

$$\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}\right)^2-2x\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}\right)+pq\left(\frac{y^2}{p^2}+\frac{z^2}{q^2}\right)=0.$$

La discussion de cette surface n'offre aucune difficulté.

10. J'indiquerai encore le résultat suivant :

Le lieu des foyers des sections d'une surface du second degré par des plans parallèles à un des axes est une surface du quatrième ordre.

Ainsi, pour l'ellipsoïde, le lieu des foyers des sections parallèles à l'axe des x a pour équation

$$\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}+x^2\right]$$
$$-\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}\right]=0.$$

DE L'INVOLUTION PLANE;

PAR M. POUDRA.

La théorie de l'involution est, en Géométrie, une des plus utiles et des plus fécondes, pour l'étude des proprié-

tés des courbes planes du second degré; nous nous proposons de faire voir qu'il y a une théorie analogue pour les surfaces du deuxième degré.

On sait que si, dans un plan, on a une série d'angles droits ayant même sommet, chacun d'eux détermine sur une transversale quelconque deux points, et que la série des couples de points ainsi déterminés forme sur cette droite une involution dont le point central est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet commun de l'angle droit sur cette transversale.

Par analogie, supposons dans l'espace une série d'angles solides trirectangles, ayant même sommet Q. Ils détermineront sur un plan transversal quelconque une série de groupes de trois points conjugués (m, n, p) dont l'ensemble formera, dirons-nous, une involution plane.

Considérons un des triangles, mnp, formé par trois de ces points; il est évident que les trois sphères qui ont pour diamètres les côtés de ce triangle passent toutes les trois par le sommet Q et qu'ainsi elles se coupent suivant une droite QoQ_1, perçant le plan en un point o tel que $Qo = Q_1 o$, et perpendiculaire à ce plan. Abaissons de chaque sommet m, n, p du triangle les perpendiculaires ma, nb, pc sur le côté directement opposé: il est évident que la sphère ayant mn pour diamètre coupera le plan suivant une circonférence passant par les points a et b sommets d'angles droits ayant mn pour base commune; de même la sphère décrite sur np comme diamètre passera par les sommets b, c d'angles droits ayant pour base commune la droite np; de même enfin, la sphère décrite sur mp comme diamètre passera par les points a et c pieds des perpendiculaires abaissées des points m et p sur les côtés respectivement opposés. Il résulte de là:

1° Que le point d'intersection des trois perpendicu-

laires sera précisément le pied o de la perpendiculaire QoQ_1 abaissée du sommet commun Q sur le plan;

2° Que ce point o sera le même pour tous les triangles formant l'involution;

3° Que les angles tels que mQa, nQb, pQc, $m'Qa'$, $n'Qb'$,..., étant droits, on aura

$$om.oa = on.ob = op.oc$$
$$= om'.oa' = on'.ob' = op'.oc' = \overline{Qo}^2,$$

et qu'ainsi le point o est le point central de l'involution. La longueur Qo sera dite la puissance de l'involution dont Q est le sommet.

4° Si du point o comme centre, avec Qo pour rayon, on décrit dans le plan une circonférence, elle sera dite la circonférence moyenne de l'involution.

5° Si on rabat sur le plan du triangle mnp les trois faces triangulaires qui composent l'angle solide trirectangle Q, autour de chaque côté respectif mn, np, pq, le point Q tombera, pour la première, en Q' sur la perpendiculaire $pocQ'$, pour la deuxième en Q'' sur $moaQ''$, et pour la troisième en Q''' sur $nobQ'''$. D'où résulte qu'on a

$$cm.cn = \overline{Q'c}^2, \quad ap.an = \overline{aQ''}^2, \quad bp.bm = \overline{bQ'''}^2.$$

6° Si dans l'involution plane on suppose le point m fixe, les deux points n, p peuvent varier sur le droite pan, mais par leurs diverses positions ils détermineront sur cette droite une involution linéaire dont a sera le point central et aQ'' la puissance. De même, en supposant successivement n, p fixes.

Si le point m reste sur la droite moa, la droite np restera parallèle à elle-même et la succession des points m et a formera sur la droite ma une involution linéaire dont o sera le point central.

Si le point *m* est sur la circonférence moyenne, la droite *np* sera tangente à ce cercle au point *a* où le diamètre *moa* coupe cette circonférence.

Si le point *m* est en *o*, alors la base opposée *np* est à l'infini, le plan Qpn devient parallèle au plan de la base, et les arêtes Qp, Qn sont deux horizontales rectangulaires situées dans ce plan.

Si, au contraire, la droite *np* passait par le point *o*, alors le point opposé *m* passerait à l'infini et l'arête Qm deviendrait une horizontale perpendiculaire au plan Qnp qui dans ce cas serait vertical.

Pour une position quelconque du point *m*, le côté opposé *np* s'obtiendra en prenant, sur la droite *mo* qui joint ce point *m* au point central, une longueur *oa* telle que $oa.om = \overline{oQ}^2$ et menant par ce point *a* une perpendiculaire *npa* à la droite *aom*, et prenant sur *npa* deux points *n*, *p* tels que $an.ap = \overline{aQ}^2$: on aura ainsi trois points *m*, *n*, *p* formant un groupe de l'involution.

Par suite, un seul triangle *mnp* détermine généralement l'involution dont il fait partie, puisque le point centra sera le point d'intersection des trois perpendiculaires de ce triangle et que la puissance $\overline{Qo}^2$ de cette involution sera le produit des deux segments dans lesquels ce point *o* divise une quelconque de ces perpendiculaires. Si le triangle donné *mnp* contenait un angle obtus, alors le point *o* serait en dehors du triangle; les trois sphères décrites sur les côtés *mn*, *np*, *pm* comme diamètre se couperaient bien suivant trois plans passant par une même droite perpendiculaire au plan de cette base, mais cette perpendiculaire ne rencontrerait plus les surfaces sphériques, de sorte que le point Q deviendrait imaginaire, ainsi que l'angle trirectangle. On voit, en

effet, qu'un angle solide trirectangle ne peut être coupé par un plan en trois points formant un triangle ayant un angle obtus.

Dans chaque triangle mnp de l'involution, les trois perpendiculaires passant par un même point, elles divisent les côtés opposés en segments ayant entre eux la relation :

$$\frac{cm}{cn} : \frac{ap}{an} = \frac{bm}{bp}.$$

Étant donnés dans un même plan deux triangles, chacun d'eux détermine généralement une involution plane ; on demande si ces deux involutions peuvent avoir un même groupe commun de trois points.

Il semble au premier abord que la réponse à cette question est négative, cependant nous allons faire voir que ces deux involutions ont un triangle commun et rien qu'un seul. Cette observation est importante, car c'est sur cette proposition que repose la détermination des axes d'une surface du second degré.

Soient o et o' les centres de ces deux involutions ; oQ, o'Q' leurs puissances respectives. Sur la droite oo' qui joint les deux centres, on peut prendre une série de couples de points m, n formant une involution linéaire dont $\overline{o\mathrm{Q}}^2$ serait la puissance, et o le centre ; dans ce cas, on a vu que le point conjugué p serait à l'infini sur l'arête Qp, perpendiculaire alors au plan vertical QomnQ'o'. De même, dans la seconde involution, prenons sur cette même droite oo' une série de points m', n' formant sur cette droite une involution linéaire dont o' serait le point central et $\overline{o'\mathrm{Q}'}^2$ la puissance ; il en résultera que le point conjugué p' sera à l'infini sur l'arête Q'p' perpendiculaire au même plan vertical QomnQ'$o'm'n'$: donc les deux arêtes Qp, Q'p' des deux involutions passeraient par

le même point p ou p' situé à l'infini. Or, sur la droite oo' il y a deux involutions linéaires, l'une formée par la série des points m, n, et l'autre par celle des points m', n'. On sait que ces deux involutions ont un segment commun et rien qu'un seul; pour le déterminer, traçons dans le plan $QoQ'o'$ la circonférence qui passe par les points Q et Q' et dont le centre serait sur la droite oo': il est évident qu'elle rencontrera cette droite en deux points qui détermineront le segment commun des deux involutions, car ces points joints à Q ou à Q' donnent toujours deux droites rectangulaires; il en résulte que si r et s sont ces points, les trois arêtes Qr, Qs, Qp et les suivantes $Q'r$, $Q's$, $Q'p$ telles que les arêtes Qp, $Q'p$ sont perpendiculaires au plan des deux autres, par conséquent horizontales et parallèles, ayant ainsi en commun le point p à l'infini, ces deux systèmes de trois arêtes deux à deux rectangulaires auront le triangle commun rsp dont le point p est à l'infini, c'est-à-dire que le triangle commun sera composé d'un côté rq et de deux perpendiculaires élévées en r et s à la droite rs.

Il est encore d'autres propriétés d'un triangle et des trois perpendiculaires considérés comme la base d'un tétraèdre $Qmnp$ à angle trirectangle au sommet Q.

7° Les trois côtés du triangle et les trois perpendiculaires forment six droites jouissant des propriétés de l'involution linéaire, c'est-à-dire qu'elles sont coupées par une transversale en six points en involution.

8° Si par le point central o on mène les parallèles aux côtés du triangle, on aura un faisceau de six droites en involution formées par des couples de droites rectangulaires; mais le point o étant commun à tous les triangles de l'involution, si on mène par ce point des parallèles aux côtés de tous ces triangles, ces parallèles et les perpendiculaires formeront un faisceau de couples de droites

rectangulaires, et par conséquent un faisceau de droites d'une même involution. On peut de même considérer l'axe Q*o* comme l'axe d'un faisceau en involution passant par les droites ci-dessus.

9° Dans le tétraèdre Q*mnp*, l'angle solide en Q étant trirectangle, on a

$$\overline{Qm}^2 + \overline{Qn}^2 + \overline{Qp}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{mn}^2 + \overline{np}^2 + \overline{pm}^2\right) = D^2$$

(D étant le diamètre de la sphère qui passe par les quatre points *m*, *n*, *p*, Q).

On en tire

$$\pi.\overline{mn}^2 + \pi.\overline{np}^2 + \pi.\overline{pm}^2 = 2\pi.D^2,$$

c'est-à-dire que la somme des surfaces des trois cercles décrits sur les trois côtés du triangle comme diamètres est la moitié de la surface du cercle construit sur le diamètre D de la sphère, par conséquent moitié de la surface de la sphère.

10° Le carré de la surface du triangle *mnp* est égal à la somme des carrés des trois triangles Q*mn*, Q*np*, Q*pm* (théorème de Tinseau).

11° La somme des carrés des cosinus des angles que fait la base *mnp* avec les trois plans rectangulaires Q*mn*, Q*np*, Q*pm* est égale à l'unité, et la somme des carrés des sinus est égale à 2. Ces sommes sont donc les mêmes pour tous les triangles de l'involution.

12° La droite Q*o* fait avec les trois arêtes rectangulaires Q*m*, Q*n*, Q*p* des angles dont la somme des carrés des cosinus est égale à 1; or Q*o* est perpendiculaire au plan de la base *mnp* : donc la somme des carrés des sinus des angles que font les arêtes avec la base est aussi égale

à 1. Si on appelle α, β, γ ces trois angles, on a

$$\sin\alpha = \frac{Qo}{Qm}, \quad \sin\beta = \frac{Qo}{Qn}, \quad \sin\gamma = \frac{Qo}{Qp};$$

donc

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \overline{Qo}^2 \left(\frac{1}{\overline{Qm}^2} + \frac{1}{\overline{Qn}^2} + \frac{1}{\overline{Qp}^2} \right) = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\overline{Qm}^2} + \frac{1}{\overline{Qn}^2} + \frac{1}{\overline{Qp}^2} = \frac{1}{\overline{Qo}^2} = \text{const.}$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des valeurs inverses des arêtes est une quantité constante pour tous les triangles d'une même involution, et égale au carré de la valeur inverse de la perpendiculaire Qo abaissée du sommet commun Q de l'angle trirectangle sur la base.

13° L'involution plane comme celle qui est linéaire est projective, c'est-à-dire que, mise en perspective sur un autre plan, elle donne lieu à une autre involution, mais pour laquelle le point central n'est plus aussi la perspective du point central de la première.

Nous avons établi l'analogie qui existe entre l'involution linéaire engendrée par les côtés d'un angle droit tournant autour de son sommet, coupés par une transversale; on sait que, dans ce cas, le point central est situé entre chacun des couples de points conjugués, tous les segments formés par ces couples de points empiètent l'un sur l'autre; mais on sait qu'il y a une involution où les segments sont compris l'un dans l'autre et où le point central est en dehors, et qui ne peut plus être engendrée de la même manière. Cette involution a deux points doubles, situés de chaque côté du point central et à égale distance. Nous allons voir qu'il existe un genre d'involution analogue pour l'involution plane.

Sur la même figure, considérons le triangle *pon* qui a un angle obtus en *o*; abaissons de chaque sommet la perpendiculaire sur le côté opposé; ces trois perpendiculaires se rencontreront toujours en un même point *m*, mais qui sera en dehors du triangle *pon* si ce triangle renferme un angle obtus. Si sur les trois côtés *po*, *pn*, *on*, comme diamètres on décrit trois sphères, les plans d'intersection de ces sphères, deux à deux, seront trois plans verticaux dont les traces *mn*, *mp*, *ma* se couperont suivant une verticale projetée en *m*, qui ne rencontre aucune des trois sphères. Ces trois traces *mn*, *mp*, *ma* rencontreront les côtés opposés du triangle *pon* aux points *c*, *b*, *a*, tels, qu'on aura évidemment

$$mc.mn = mb.mp = ma.mo;$$

et si maintenant on considère le tétraèdre Q*mnp* de la première involution à angle solide trirectangle en Q, on voit que *m*Q perpendiculaire au plan Q*np* sera telle, qu'on aura

$$\overline{mQ}^2 = ma.mo = mb.mp = mc.mn.$$

Du point *m* comme centre, avec *m*Q pour rayon, décrivons une sphère, et d'un point *quelconque* Q de cette sphère, abaissons une perpendiculaire Q*o* sur la base; en ce point Q menons à la sphère un plan tangent Q*np* dont la trace soit *np*, sur laquelle étant pris à volonté un point *n*, on détermine le point *p* de manière que l'angle *n*Q*p* soit droit : il est évident que, quelle que soit la position du point Q sur la sphère de rayon *m*Q, les trois côtés Q*o*, Q*n*, Q*p* de l'angle solide Q*pon* dont le sommet est en Q donnera le triangle *pon* tel, qu'on aura

$$mQ^2 = mc.mn = mb.mp = mo.ma,$$

et alors la série des groupes de trois points tels que *p*, *o*, *n* formera une involution dont le point central *m* sera extérieur aux triangles *pon*, et dont la puissance sera le rayon *m*Q de la sphère.

Dans cette involution, on remarquera que le point Q étant sur la sphère, le tétraèdre Q*mnp* aura son angle trièdre Q formé de trois angles droits. Le point central *m* sera fixe et les trois sommets *p*, *o*, *n* variables et déterminés par les arêtes Q*p*, Q*o*, Q*n* qui forment en Q un angle solide qui n'est plus trirectangle, mais dont un des angles est droit. Si dans le plan de la base on décrit une circonférence, dont *m* serait le centre et la puissance *m*Q le rayon, on voit que si le point Q se trouve sur cette circonférence, les trois points *p*, *o*, *n* se réuniront en un seul.

Les propriétés particulières à cette involution se déduiront facilement de la considération que l'angle Q, du tétraèdre Q*mnp*, est trirectangle.

Ainsi, on peut définir généralement l'involution plane comme étant la série de groupes de trois points quelconques, formant des triangles ayant même point d'intersection des trois perpendiculaires; d'où il suit que le produit des deux segments formés sur chaque perpendiculaire entre ce point, le sommet et le côté opposé sur lequel elle est perpendiculaire, est constant. D'où résultent deux différentes involutions, suivant que le point d'intersection de ces trois perpendiculaires est en dedans ou en dehors des triangles, d'où résulte analogie évidente avec l'involution linéaire.

(*La suite prochainement.*)

REMARQUES SUR L'ABAISSEMENT ET LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

(voir p. 10).

13. M. Faure a énoncé le *porisme* suivant (*voir* t. XVI, p. 59, question 362) :

L'équation générale du cinquième degré

$$(1)\qquad ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

peut toujours se résoudre algébriquement lorsqu'on a entre les coefficients les relations

$$(2)\qquad \frac{d^2 - ce}{b^2 - ac} = \frac{e^2 - df}{c^2 - bd} = \frac{de - cf}{bc - ad}.$$

Cette question, posée en 1857, n'a pas encore été résolue. Ce qui la rend particulièrement difficile, c'est l'ignorance de la forme sous laquelle doivent se présenter les racines. Si cette forme était connue, elle devrait renfermer trois indéterminées en fonction desquelles on pourrait exprimer les rapports des coefficients à l'un d'entre eux : on aurait cinq équations qui par l'élimination des trois indéterminées fourniraient les relations indiquées dans l'énoncé. La démonstration se réduirait donc à une vérification.

La plus simple équation du cinquième degré résoluble par radicaux est l'équation binôme

$$x^5 + \lambda = 0,$$

et cette propriété se conserve dans les transformations que l'on peut faire subir à cette équation. Une des plus

simples consiste à changer x en $\frac{x+\iota}{x+\jmath}$ ... donne la transformée

$$(3)\qquad (x+\alpha)^5+\lambda(x+\beta)^5=0,$$

dont l'identification avec l'équation (1) donne

$$\frac{1+\lambda}{a}=\frac{\alpha+\lambda\beta}{b}=\frac{\alpha^2+\lambda\beta^2}{c}=\frac{\alpha^3+\lambda\beta^3}{d}=\frac{\alpha^4+\lambda\beta^4}{e}=\frac{\alpha^5+\lambda\beta^5}{f}.$$

L'élimination de λ entre ces équations conduit aux suivantes :

$$\frac{a\alpha-b}{b-a\beta}=\frac{a\alpha^2-c}{c-a\beta^2}=\frac{a\alpha^3-d}{d-a\beta^3}=\frac{a\alpha^4-e}{e-a\beta^4}=\frac{a\alpha^5-f}{f-a\beta^5},$$

que l'on peut écrire ainsi, après quelques réductions :

$$(4)\qquad a\alpha\beta-b(\alpha+\beta)+c=0,$$

$$(5)\qquad a\alpha\beta(\alpha+\beta)-b(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)+d=0,$$

$$(6)\qquad a\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)-b(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)+e=0,$$

$$(7)\qquad a\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-b(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)+f=0.$$

Les équations (4) et (5) donnent

$$(8)\qquad \alpha\beta=\frac{bd-c^2}{ac-b^2},\quad \alpha+\beta=\frac{ad-bc}{ac-b^2}.$$

Il ne resterait plus qu'à substituer ces valeurs dans les équations (6) et (7) qui sont symétriques par rapport à α et à β ; mais ce calcul serait compliqué et on peut l'éviter par la considération suivante.

Si l'on prend l'équation aux inverses des racines des équations (1) et (3), on aura

$$(1)'\qquad fx^5+ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=0,$$

$$(3)'\qquad \left(\frac{1}{x}+\alpha\right)^5+\lambda\left(\frac{1}{x}+\beta\right)^5=0.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)^5+\frac{\beta^5}{\alpha^5}\lambda\left(x+\frac{1}{\beta}\right)^5=0,$$

ou, en posant $\mu=\frac{\beta^5\lambda}{\alpha^5}$,

$$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)^5+\mu\left(x+\frac{1}{\beta}\right)^5=0.$$

Or, cette équation est de même forme que l'équation (3), et par suite, comparée à l'équation (1)', elle conduira à des relations qui devront se déduire des équations (8) par le changement de α en $\frac{1}{\alpha}$, de β en $\frac{1}{\beta}$, de a, b, c... en f, e, d,... On aura donc

$$(9) \qquad \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{ce-d^2}{df-e^2}, \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{cf-de}{df-e^2},$$

ou

$$(10) \qquad \alpha\beta=\frac{df-e^2}{ce-d^2}, \quad \alpha+\beta=\frac{cf-de}{ce-d^2}.$$

La comparaison des équations (8) et (10) donne immédiatement les relations (2), et l'on peut compléter le porisme de M. Faure, qui devient alors un théorème, par l'addition suivante :

Les racines de l'équation (1) *sont de la forme*

$$x=\frac{\beta\sqrt[5]{\lambda}-\alpha}{1-\sqrt[5]{\lambda}},$$

où α et β sont les racines de l'équation

$$(ac-b^2)z^2-(ad-bc)z+bd-c^2=0,$$

et

$$\lambda=\frac{a\alpha-b}{b-a\beta}.$$

14. On aurait pu se contenter, après avoir *deviné* que l'équation (1) devait être réductible à la forme (3), de vérifier si les coefficients de l'équation (3) satisfont aux relations (2); mais cela n'aurait pas appris si les relations (2) sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Au reste, on peut trouver d'autres théorèmes du même genre. Par exemple, l'équation (1) serait encore résoluble algébriquement si l'on avait

$$\frac{b^2 - ac}{a^2} = \frac{c^2 - ae}{b^2 + 3ac} = \frac{bc - ad}{2ab},$$

et les racines seraient de la forme...; mais nous laisserons aux lecteurs le plaisir de découvrir eux-mêmes cette forme, si cela les intéresse. P.

COMPOSITION POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1864) (*).

On donne sur un plan une circonférence (O), un point A et une droite (D); du point A on mène une droite qui coupe (D) au point B; sur AB comme diamètre on décrit une circonférence : cette circonférence et la circonférence O ont pour corde commune une droite qui rencontre AB en M. On demande le lieu décrit par le point M lorsque la droite AB tourne autour du point A.

1° Le point A et la circonférence (O) étant fixes, examiner quelles sont les différentes formes que présente le

(*) Donnée à quelques élèves qui n'ont pu composer avec la majorité des candidats.

lieu (M) lorsque l'on considère des droites telles que D parallèles entre elles.

2° Faire voir que les différentes courbes ainsi obtenues passent par quatre points fixes et ont leurs axes parallèles.

BIBLIOGRAPHIE.

HANDBUCH DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS. TRAITÉ D'ANALYSE ALGÉBRIQUE; par M. *O. Schlömilch*, professeur à l'École Polytechnique de Dresde. 3e édition; 1 volume grand in-8 de 414 pages. Iéna, 1862.

Nous nous proposions depuis longtemps de signaler aux lecteurs des *Nouvelles Annales* cet excellent ouvrage, dont nous ne saurions trop recommander l'étude aux candidats à nos grandes Écoles et aux auditeurs des Facultés des Sciences. Les théories exposées dans ce livre forment une introduction à l'étude du Calcul infinitésimal, servant de complément aux traités d'Algèbre, et renfermant la plupart des formules importantes qui peuvent s'établir d'une manière simple et naturelle sans le secours de la notation différentielle. On en pourra juger d'après l'analyse sommaire que nous allons donner des principaux chapitres.

Chapitre Ier. — Généralités sur les variables, sur les fonctions et sur leur représentation géométrique. — Formules relatives à l'addition des fonctions circulaires inverses.

Chapitre II. — Des valeurs-limites des fonctions.

On y trouve exposées avec détail les formules sur lesquelles est fondée la différentiation des fonctions expo-

nentielles et logarithmiques, formules qui sont par elles-mêmes d'un grand usage dans les calculs d'approximation et dans la théorie des séries. La formule

$$\lim \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu,$$

pour δ infiniment petit, de laquelle toutes les autres se déduisent, est démontrée à l'aide d'inégalités très-simples résultant d'identités algébriques, et sans aucun recours à la formule du binôme et aux développements infinis. On en déduit très-simplement la méthode pratique qu'ont employée les premiers inventeurs, Neper et Briggs, pour le calcul des Tables de logarithmes. On en tire encore les formules suivantes, utiles dans la théorie des séries.

Si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{LL}\omega = \mathrm{L}_2\omega, \quad \mathrm{LLL}\omega = \mathrm{L}_3\omega, \ldots,$$

L désignant des logarithmes relatifs à une base quelconque, et si l'on pose

$$f(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^\mu\right]\omega,$$

$$f_1(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{L}\omega}{\mathrm{L}(\omega+1)}\right)^\mu\right]\omega.\mathrm{L}\omega,$$

$$f_2(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{L}_2\omega}{\mathrm{L}_2(\omega+1)}\right)^\mu\right]\omega.\mathrm{L}\omega.\mathrm{L}_2\omega,$$

et ainsi de suite, on aura, pour ω infini,

$$\lim f_p(\omega) = \mu\,(\mathrm{L}e)^p.$$

Chapitre III. — Continuité et discontinuité des fonctions.

Chapitre IV. — Valeurs moyennes des fonctions.

Ce chapitre contient le développement d'une théorie

analogue à l'*Arithmétique des infinis* de Wallis, et conduisant facilement à un grand nombre de résultats que l'on obtient ordinairement par le calcul intégral. La *valeur moyenne* d'une fonction $f(x)$, prise entre les limites x_0 et X de la variable, n'est autre chose que la quantité

$$\frac{1}{X - x_0}\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

On parvient à la déterminer par des considérations directes, analogues à celles du chapitre II, et les résultats obtenus servent à remplacer l'intégration dans ses applications les plus simples au développement des fonctions en séries et à l'évaluation des aires et des volumes. C'est ainsi que l'auteur est conduit aux développements en séries de $\log(1 + x)$ et de $\operatorname{arc\,tang} x$, dont il obtient immédiatement le terme complémentaire sous une forme très-simple. Le même procédé lui donne les développements de $\sin x$ et de $\cos x$, la cubature des surfaces du second ordre et les formules pour le calcul approximatif des quadratures.

Chapitre V. — Des séries infinies.

Nous remarquons d'abord dans ce chapitre le caractère de convergence de la série

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b(b+1)}{a(a+1)} + \frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)} + \ldots.$$

Ensuite, après avoir établi les règles de convergence les plus simples, fondées sur le principe de la comparaison des séries, M. Schlömilch expose avec détail les caractères qui font reconnaître la convergence dans les cas douteux successifs. Puis il traite de la convergence absolue ou conditionnelle, des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable et de la continuité des fonc-

tions qu'elles représentent, des séries périodiques, de l'addition et de la multiplication des séries; il termine par quelques notions sur les séries doubles et sur leur convergence absolue ou conditionnelle.

Chapitre VI. — Théorème du binôme. — Série binomiale pour un exposant quelconque. Discussion de sa convergence. — Propriétés des coefficients binomiaux. — Applications.

Chapitre VII. — Séries exponentielles et logarithmiques.

Chapitre VIII. — Séries goniométriques (développement des fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, etc.). — Expression des fonctions circulaires sous forme de produits infinis. — Développement de $\log \sin x$, $\log \cos x$, etc., en séries. — Développement de $\text{séc}\, x$, de $\text{tang}\, x$, etc.

Chapitre IX.— Séries cyclométriques (développement des fonctions circulaires inverses $\text{arc} \sin x$, $\text{arc tang}\, x$, etc.).

Chapitre X. — Des fonctions de variables complexes. — Théorème de Moivre et ses conséquences. — Exponentielles à exposants complexes.

L'auteur part de l'équation de définition

$$e^{x+iy} = \lim \left(1 + \frac{x+iy}{m}\right)^m$$

pour $m = \infty$.

Logarithmes des quantités complexes.— Fonctions circulaires des quantités complexes.

Nous aurions désiré que l'auteur eût indiqué à cet endroit la notation si commode des fonctions hyperboliques, pour désigner les quantités

$$\frac{1}{i} \sin ix = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La théorie de ces fonctions, dont l'emploi est si commode dans le calcul intégral et en particulier dans le développement des fonctions elliptiques, mérite de devenir classique, surtout depuis la publication récente des excellentes Tables de M. Gronau. Il aurait suffi d'ailleurs de quelques indications, les formules relatives aux fonctions hyperboliques ne différant que par quelques changements de signe des formules relatives aux fonctions circulaires.

Représentation géométrique des nombres complexes.

Peut-être l'auteur n'a-t-il pas fait assez ressortir ici combien cette représentation est liée à l'origine même des quantités complexes; elle est déjà contenue dans la définition même de l'exponentielle imaginaire

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

$\cos x$ et $\sin x$ étant l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle de rayon 1. On aurait pu indiquer également l'analogie entre l'addition des quantités complexes et la composition des vitesses ou des forces. Nous espérons que, dans la prochaine édition, M. Schlömilch ajoutera quelques nouveaux développements sur ce sujet, qu'il connaît si bien.

Chapitre XI. — Séries et produits infinis de quantités complexes.

Chapitre XII. — Des fractions continues.

On ne suppose pas ici que les numérateurs des fractions intégrantes soient tous égaux à l'unité positive. Ils sont laissés quelconques, pour la grandeur et pour le signe.

Caractères de convergence des fractions continues infinies. — Irrationnalité de certaines fractions continues. — *Restes* des fractions continues. — Développement des racines carrées en fractions continues.

Chapitre XIII. — Transformation des séries en frac-

tions continues. — Développement des fonctions les plus importantes en fractions continues. — Irrationnalité des logarithmes naturels et du nombre π. — Remarque finale.

L'ouvrage est terminé par un *Appendice* contenant un résumé de la théorie des équations algébriques. Dans cet abrégé substantiel (90 pages) l'auteur a fait entrer la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, les éléments de la théorie des fonctions symétriques, les diverses méthodes pour le calcul approximatif des racines (il donne la préférence à la méthode de Newton modifiée par Horner), et quelques notions sur les déterminants et sur l'élimination.

D'après cet aperçu nécessairement incomplet, on peut juger de quelle utilité serait la lecture de cet ouvrage pour tous ceux qui veulent pousser l'étude des Mathématiques au delà des premiers éléments. Il serait donc bien à désirer que ce livre fût traduit dans notre langue. Cependant, grâce aux progrès que fait de nos jours l'enseignement des langues vivantes, il est à espérer que bientôt aucun candidat sérieux à l'École Polytechnique ne sera arrêté par la difficulté du texte allemand, dont le style est d'une clarté toute française.

Nous saisirons l'occasion de mentionner ici une autre publication importante du savant rédacteur du *Zeitschrift für die Mathematik und Physik*. M. Schlömilch a fait paraître l'année dernière le premier volume de la 2e édition de son Précis d'Analyse supérieure (*Compendium der höheren Analysis*). Ce volume, qui doit former la partie élémentaire de l'ouvrage, renferme à peu près les matières exigées par nos programmes pour la licence ès sciences mathématiques. Le second volume, qui, nous l'espérons, ne tardera pas à suivre le premier, renfermera les éléments des théories plus élevées du calcul intégral,

et rendra un service éminent, en facilitant l'étude de ces théories aux lecteurs qui ne peuvent recourir aux ouvrages spéciaux.

J. Hoüel.

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX ET TROIS VARIABLES;

Par M. H. LEMONNIER.

Je me propose, dans ce travail, de présenter quelques applications de formules qu'on trouve dans le *Traité des sections coniques* de Salmon, p. 142, § 161, et d'étendre les mêmes considérations aux surfaces du second degré.

PREMIÈRE PARTIE.

I. Si x et y sont les coordonnées d'un point sur un plan par rapport à des axes faisant entre eux l'angle θ, que X et Y en soient les coordonnées par rapport à des axes de même origine faisant l'angle θ', et qu'on ait

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

les deux formules dont nous développerons des conséquences sont les suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} &= \frac{A' + C' - B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}, \\ \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta} &= \frac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\theta'}. \end{aligned}\right.$$

Salmon en présente une démonstration très-simple, donnée par le professeur Boole dans le *Journal mathématique* de Cambridge. Il convient de la reproduire ici.

Soit posé

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

dans les conditions exprimées.

On sait que

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta'.$$

Donc on a identiquement

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \lambda(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta)$$
$$= A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + \lambda(X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta')$$

ou bien

$$(A + \lambda)x^2 + (B + 2\lambda\cos\theta)xy + (C + \lambda)y^2$$
$$= (A' + \lambda)X^2 + (B' + 2\lambda\cos\theta')XY + (C' + \lambda)Y^2.$$

Si l'on dispose de λ de façon que le premier membre soit le carré d'une fonction entière de x et de y,

$$mx + ny + p,$$

le second membre sera le carré d'une fonction entière de X et de Y, déduite de la précédente par la substitution des valeurs de x et de y en fonction de X et de Y.

Donc on aura pour λ les mêmes valeurs par la condition que le premier membre soit le carré d'une fonction entière de x et de y, et par la condition que le second soit le carré d'une fonction entière de X et de Y.

Donc les équations

$$(B + 2\lambda\cos\theta)^2 - 4(A + \lambda)(C + \lambda) = 0,$$
$$(B' + 2\lambda\cos\theta')^2 - 4(A' + \lambda)(C' + \lambda) = 0$$

ont les mêmes racines.

Ordonnées par rapport à λ, ces équations deviennent

$$4\sin^2\theta . \lambda^2 + 4(A + C - B\cos\theta)\lambda + 4AC - B^2 = 0,$$
$$4\sin^2\theta' . \lambda^2 + 4(A' + C' - B'\cos\theta')\lambda + 4A'C' - B'^2 = 0.$$

Il en résulte

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{A' + C' - B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}, \\[2ex] \dfrac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = \dfrac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\theta'}. \end{cases}$$

Elles pourraient s'établir par d'autres considérations.

II. Les théorèmes d'Apollonius découlent immédiatement de ces formules.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Soit

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0$$

ce que devient l'équation en prenant pour nouveaux axes coordonnés des diamètres conjugués faisant entre eux un angle θ.

Nous aurons

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\dfrac{1}{a'^2} + \dfrac{1}{b'^2}}{\sin^2\theta}$$

et

$$\frac{4}{a^2 b^2} = \frac{4}{a'^2 b'^2 \sin^2\theta}.$$

Donc

$$ab = a' b' \sin\theta$$

et par suite

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Cela s'applique à l'hyperbole par le changement de b^2 en $-b^2$ et celui de b'^2 en $-b'^2$, si l'axe des x est dirigé suivant l'axe réel de la courbe et l'axe des X suivant le diamètre réel considéré.

D'ailleurs, dans le cas de l'ellipse, pour que a'^2 et b'^2 soient réels, il faut avoir

$$\sin\theta > \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad \tang^2\theta > \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2};$$

l'angle aigu de deux diamètres conjugués y varie donc depuis un angle droit jusqu'à un minimum.

III. *Équation qui donne les longueurs de deux diamètres conjugués faisant un angle θ'.*

Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole par rapport à des axes faisant un angle θ. On a ainsi

$$B^2 - 4AC \gtrless 0,$$

Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{L}{B^2-4AC} = 0$$

L désignant l'expression

$$AE^2 - BDE + CD^2 + F(B - 4AC)$$
$$= \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} : (-2).$$

Qu'on passe de là à des axes coordonnés dirigés suivant deux diamètres conjugués faisant un angle θ', l'équation (2) devenant

$$A'X^2 + C'Y^2 + \frac{L}{B^2-4AC} = 0,$$

on aura

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C'}{\sin^2\theta'},$$

et

$$\frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta}=\frac{-4A'C'}{\sin^2\theta'}.$$

Si u et v sont les carrés des demi-diamètres, positifs ou négatifs suivant que ces diamètres sont réels ou imaginaires, u et v seront déterminés par les équations

$$A'u+\frac{L}{B^2-4AC}=0,\quad C'v+\frac{L}{B^2-4AC}=0,$$

d'où

$$A'+C'=-\frac{L}{B^2-4AC}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right),$$

$$A'C'=\frac{L^2}{(B^2-4AC)^2}\,\frac{1}{uv}.$$

Donc

$$\frac{-4L^2}{(B^2-4AC)^2\sin^2\theta'}\cdot\frac{1}{uv}=\frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{-L}{(B^2-4AC)}\,\frac{u+v}{uv\sin^2\theta'}=\frac{A+C-B\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$uv=\frac{-4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3\sin^2\theta'},$$

$$u+v=\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}\cdot 4L.$$

Ces deux résultats impliquent les théorèmes d'Apollonius. Les quantités u et v seront les racines de l'équation

$$U^2-4L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}U-\frac{4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3\sin^2\theta'}=0.$$

L'équation conviendra aux longueurs des axes si $\theta'=\frac{\pi}{2}$. Elle devient alors

$$V^2-4L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}V-\frac{4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=0.$$

IV. Étant donnée l'équation d'une hyperbole

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

rapportée à des axes faisant un angle θ, former l'équation de la courbe par rapport aux asymptotes.

L'équation devenant par le transport de l'origine au centre

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{L}{B^2 - 4AC} = 0,$$

soit

$$B'XY + \frac{L}{B^2 - 4AC} = 0$$

ce qu'elle devient quand les asymptotes sont prises pour axes coordonnés.

Si θ' désigne l'angle que font les derniers axes, nous aurons

$$\frac{B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta},$$

et

$$\frac{-B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

De là on tire

$$\frac{-\cos\theta'}{B'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{B^2 - 4AC}$$

et

$$\frac{\cos^2\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{(A + C - B\cos\theta)^2}{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta},$$

$$\tan^2\theta' = \frac{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta}{(A + C - B\cos\theta)^2},$$

$$\sin^2\theta' = \frac{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta}{(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4AC)\sin^2\theta}.$$

Donc

$$B'^2 = \frac{(B^2-4AC)^2}{(A+C-B\cos\theta)^2+(B^2-4AC)\sin^2\theta},$$

$$B' = \frac{B^2-4AC}{\pm\sqrt{(A+C-B\cos\theta)^2+(B^2-4AC)\sin^2\theta}},$$

$$\cos\theta' = \frac{A+C-B\cos\theta}{\mp\sqrt{(A+C-B\cos\theta)^2+(B^2-4AC)\sin^2\theta}}.$$

V. Soient

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$A'X^2+B'XY+C'Y^2+D'X+E'Y+F'=0$$

deux équations qui représentent soit la même ellipse, soit la même hyperbole, ou bien des ellipses ou des hyperboles de même grandeur mais différant par la situation, la première par rapport à des axes faisant un angle θ, la seconde par rapport à d'autres axes quelconques faisant un angle θ'.

L'équation dont les racines sont les carrés des demi-axes de la courbe est, dans le premier système,

$$(\alpha)\quad V^2-4L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}V-\frac{4L^2\sin^2\theta'}{(B^2-4AC)^3}=0,$$

et, dans le second système, c'est

$$(\alpha')\quad V^2-4L'\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{(B'^2-4A'C')^2}V-\frac{4L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3}=0,$$

L' étant une fonction analogue à L, savoir

$$L'=A'E'^2-B'D'E'+C'D'^2+F'(B'^2-4A'C').$$

Les deux courbes sont égales, si elles ont les mêmes

axes. Les conditions d'égalité sont donc

$$L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}=L'\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{(B'^2-4A'C')^2},$$

$$\frac{L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=\frac{L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3},$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{B^2-4AC}{B'^2-4A'C'}=\frac{L^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{2}{3}}\theta}{L'^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{2}{3}}\theta'}=\frac{L^{\frac{1}{2}}(A+C-B\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{L'^{\frac{1}{2}}(A'+C'-B'\cos\theta')^{\frac{1}{2}}}.$$

Il est à remarquer que si les deux équations se rapportent à la même origine ainsi qu'à la même courbe, et qu'on ait $F = F'$, on aura

$$\frac{A+C-B\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'},$$

avec

$$\frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta}=\frac{B'^2-4A'C'}{\sin^2\theta'};$$

par suite,

$$\frac{L}{\sin^2\theta}=\frac{L'}{\sin^2\theta'}\quad\text{ou}\quad\frac{L}{B^2-4AC}=\frac{L'}{B'^2-4A'C'}.$$

VI. Les deux équations

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$A'X^2+B'XY+C'Y^2+D'X+E'Y+F'=0$$

représentent des hyperboles conjuguées, si, ayant

$$B^2-4AC>0,\quad B'^2-4A'C'>0,$$

les deux équations (α) et (α') ont leurs racines égales et de signes contraires, c'est-à-dire si l'on a

$$L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}=-L'\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{(B'^2-4A'C')^2},$$

$$\frac{L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=\frac{L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3}$$

ou bien

$$\frac{B^2 - 4AC}{B'^2 - 4A'C'} = \frac{L^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \theta}{L'^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \theta'} = \left[- \frac{L(A + C - B\cos\theta)}{L'(A' + C' - B'\cos\theta')} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

VII. Soient des paraboles égales données par les deux équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0.$$

En considérant la parabole comme la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole, la dernière forme donnée aux équations de condition du § V conduit, à cause des égalités

$$B^2 - 4AC = 0, \quad B'^2 - 4A'C' = 0,$$

à la relation

$$\frac{L^{\frac{1}{3}} \sin^{\frac{4}{3}} \theta}{L'^{\frac{1}{3}} \sin^{\frac{4}{3}} \theta'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{A' + C' - B'\cos\theta'}.$$

Cette condition peut se transformer.

Nous aurons ici

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 = AE^2 - BDE + \frac{B^2D^2}{4A} = \frac{(BD - 2AE)^2}{4A},$$

en supposant

$$A \gtrless 0.$$

De même,

$$L' = \frac{(B'D' - 2A'E')^2}{4A'} \quad \text{si} \quad A' \gtrless 0;$$

On aurait aussi

$$L = \frac{(BE - 2CD)^2}{4C} \quad \text{et} \quad L' = \frac{(B'E' - 2C'D')^2}{4C'}.$$

La condition d'égalité devient donc

$$\frac{(\mathrm{BD}-2\mathrm{AE})^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{3}}}\sin^{\frac{4}{3}}\theta : \frac{(\mathrm{B'D'}-2\mathrm{A'E'})^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{A'}^{\frac{1}{3}}}\sin^{\frac{4}{3}}\theta' = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta}{\mathrm{A'}+\mathrm{C'}-\mathrm{B'}\cos\theta'},$$

ou bien

$$\frac{(\mathrm{BE}-2\mathrm{CD})^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{C}^{\frac{1}{3}}}\sin^{\frac{4}{3}}\theta : \frac{(\mathrm{B'E'}-2\mathrm{C'D'})^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{C'}^{\frac{1}{3}}}\sin^{\frac{4}{3}}\theta' = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta}{\mathrm{A'}+\mathrm{C'}-\mathrm{B'}\cos\theta'}.$$

De là se déduit le paramètre d'une parabole donnée par l'équation

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0,$$

relativement à un diamètre faisant l'angle θ' avec les cordes qui lui sont conjuguées.

Soit

$$\mathrm{Y}^2-2p'\mathrm{X}=0$$

la seconde équation de la parabole.

Nous aurons

$$\frac{(\mathrm{BE}-2\mathrm{CD})^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{C}^{\frac{1}{3}}}\sin^{\frac{4}{3}}\theta : (4p')^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{4}{3}}\theta' = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta}{1},$$

d'où

$$(4p')^{\frac{2}{3}} = \frac{(\mathrm{BE}-2\mathrm{CD})^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{C}^{\frac{1}{3}}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta)}\,\frac{\sin^{\frac{4}{3}}\theta}{\sin^{\frac{4}{3}}\theta'};$$

donc

$$p' = \frac{\mathrm{BE}-2\mathrm{CD}}{4\left[\mathrm{C}^{\frac{1}{3}}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta'}.$$

Si l'on désigne par $2p_{\theta'}$ et par $2p_{\theta''}$ les paramètres re-

latifs à des diamètres inclinés des angles θ' et θ'' sur leurs cordes, on aura donc

$$p_{\theta'} \sin^2\theta' = p_{\theta''} \sin^2\theta'' = p_{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\mathrm{BE} - 2\,\mathrm{CD}) \sin^2\theta}{4\left[\mathrm{C}^{\frac{1}{3}} (\mathrm{A} + \mathrm{C} - \mathrm{B}\cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{(\mathrm{BD} - 2\,\mathrm{AE}) \sin^2\theta}{4\left[\mathrm{A}^{\frac{1}{3}} (\mathrm{A} + \mathrm{C} - \mathrm{B}\cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Que l'équation d'une parabole soit

$$(\theta) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0,$$

on aura donc

$$p_{\theta'} \sin^2\theta' = \frac{2 \sin^2\theta}{ab\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2\cos\theta}{ab}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\left(\frac{2}{p_{\theta'}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2\cos\theta}{ab}\right)$$
$$= \left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\cos\theta}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}\right),$$

ce qui donne, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta' = \frac{\pi}{2}$,

$$\left(\frac{2}{p_{\frac{\pi}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.$$

Ce dernier résultat a été obtenu plus longuement par Salmon (p. 179, § 213).

VIII. *A quelles conditions les équations*

$$(\theta)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$(\theta')\qquad A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donnent-elles des ellipses ou des hyperboles semblables?

Considérons les équations correspondantes relatives aux axes

$$V^2 - \frac{4L}{(B^2-4AC)^2}(A+C-B\cos\theta)V - \frac{4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3} = 0,$$

$$V'^2 - \frac{4L'}{(B'^2-4A'C')^2}(A'+C'-B'\cos\theta')V' - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3} = 0.$$

Les racines de la première étant u et v, celles de la seconde u' et v', les deux courbes sont semblables, si l'on a

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = K,$$

le rapport de similitude $\sqrt{K}$ pouvant être réel ou imaginaire.

De là,

$$u' = uK,\quad v' = vK,$$

c'est-à-dire pour la seconde équation

$$V' = VK,$$

d'où

$$K^2V^2 - \frac{4L'}{(B'^2-4A'C')^2}(A'+C'-B'\cos\theta')KV - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3} = 0,$$

ou bien

$$V^2 - \frac{4L'}{(B'^2-4A'C')^2}\frac{(A'+C'-B'\cos\theta')}{K}.V - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{K^2(B'^2-4A'C')^3} = 0.$$

En conséquence, on a pour équations de condition

$$\frac{L(A+C-B\cos\theta)}{(B^2-4AC)^2}=\frac{L'(A'+C'-B'\cos\theta')}{(B'^2-4A'C')^2.K}$$

et

$$\frac{L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=\frac{L'^2\sin^2\theta'}{K^2(B'^2-4A'C')^3};$$

d'où

$$K=\frac{L'}{L}\left(\frac{B^2-4AC}{B'^2-4A'C'}\right)^2\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{A+C-B\cos\theta}$$

et

$$K^2=\left(\frac{L'}{L}\right)^2\left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{B^2-4AC}{B'^2-4A'C'}\right)^3.$$

Donc on a

$$\left(\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{A+C-B\cos\theta}\right)^2=\frac{B'^2-4A'C'}{B^2-4AC}\left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^2.$$

Pour que le rapport de similitude soit réel, il faut d'ailleurs que l'on ait

$$\frac{L'}{L}\,\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{A+C-B\cos\theta}>0.$$

IX. Si l'équation

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

rapportée à des axes coordonnés faisant l'angle θ, représente une ellipse dont a et b seront les demi-axes, l'aire de l'ellipse sera

$$\pi ab=\pi\sqrt{\frac{-4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}}=\frac{2\pi L\sin\theta}{(4AC-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Signalons encore pour une ellipse ou une hyperbole

rapportée en coordonnées rectangulaires à deux systèmes d'axes dont l'origine commune est sur le centre, ayant ainsi les équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$
$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + F = 0,$$

les deux relations

$$A + C = A' + C',$$
$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'.$$

La première revient, si r et r' sont deux rayons à angle droit, R et R' deux autres rayons analogues, à la formule

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}.$$

J'ai fait voir d'ailleurs, par un article inséré déjà dans les *Annales*, comment deux formules signalées par M. l'abbé Aoust et par M. Faure se rattachent à nos deux formules du n° I. On en déduit, dans le cas de trois rayons rectangulaires,

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$$

et

$$\frac{9}{16}\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{10}{3a^2b^2}\right) = \frac{1}{r^2 r_1^2} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 r^2}.$$

(*Fin de la première partie.*)

NOTE SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ ET SOLUTION DE LA QUESTION 700;

PAR M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

La proposition énoncée sous le n° 700 dans la livraison de mars, savoir :

La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement (STREBOR), est une conséquence immédiate de quelques propriétés bien connues des surfaces du second degré.

1° *Le rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface du second degré* (à centre) *est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente, divisé par la distance du centre au plan tangent en ce point* : $r = \frac{D^2}{P}$.

En effet, soit ds le rayon vecteur de l'indicatrice qui correspond à la section normale menée par un point M, et k la distance du plan de l'indicatrice au plan tangent en ce point; le rayon de courbure r de la section est égal à $\frac{ds^2}{2k}$. Désignons par E le demi-diamètre qui aboutit au point M, par h la portion de ce diamètre comprise entre M et le plan de l'indicatrice, et par θ l'angle qu'il forme avec la normale en M; on a, d'une part,

$$k = h\cos\theta,$$

d'autre part,

$$\frac{2h}{E} = \frac{ds^2}{D^2}.$$

Portant ces valeurs de k et ds^2 dans l'expression de r, on obtient

$$r = \frac{D^2}{E\cos\theta}$$

ou

$$r = \frac{D^2}{P}. \qquad (1)$$

Corollaire. — *Le long d'une section circulaire, le rayon de courbure de la section normale est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.*

On peut remarquer encore, en passant, une conséquence importante de la formule (1), savoir :

Les sections circulaires en chaque point sont également inclinées sur les lignes de courbure qui passent par ce point; puisque les rayons de courbure des sections normales, dirigées suivant les deux sections circulaires, sont égaux, en vertu de la formule (1).

2° *La distance, en un point, d'une surface du second degré à la surface homofocale infiniment voisine, est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point.*

Désignons, suivant l'usage, par ρ^2, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$, les carrés des demi-axes de la surface; par α, β, γ les angles que forme avec les axes la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en un point de cette surface. On a

$$P^2 = \rho^2\cos^2\alpha + (\rho^2 - b^2)\cos^2\beta + (\rho^2 - c^2)\cos^2\gamma$$

ou

$$P^2 = \rho^2 - b^2\cos^2\beta - c^2\cos^2\gamma.$$

Si l'on passe à la surface homofocale infiniment voisine, en laissant constants β, γ, la variation de P sera la

distance dn cherchée. On a donc

$$(2)\qquad dn = \frac{\rho\, d\rho}{P}$$

3° *Le long d'une section circulaire, le cosinus de l'angle θ, que forme la normale en un point avec le rayon du cercle qui aboutit à ce point, est égal au quotient du rayon de ce cercle par le rayon de courbure de la section normale correspondante* : $\cos\theta = \frac{R}{r}$. (Théorème de Meusnier.)

Cela posé, revenons à la question qui fait l'objet de cette Note.

Que l'on mène les normales à la surface le long des sections circulaires diamétrales, et qu'on les prolonge extérieurement jusqu'à la surface homofocale infiniment voisine, les extrémités de ces normales sont à une distance du centre égale à

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{P}\cdot\cos\theta$$

ou

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{P}\cdot\frac{R}{r}$$

ou

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{P}\cdot\frac{RP}{R^2}$$

ou enfin

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{R} \quad (*).$$

Cette distance est constante ; tous ces points sont donc sur une sphère concentrique à la surface, et, par suite, ils appartiennent aux sections circulaires diamétrales de la surface homofocale infiniment voisine.

(*) Ce que nous appelons R ici est le demi-axe moyen de la surface.

Cette conclusion renferme la proposition énoncée.

Note. — MM. Courtin et Godart, Angiboust, élèves de Sainte-Barbe; Lacauchie, élève du lycée de Strasbourg, et de Marsilly, nous ont adressé des vérifications analytiques du théorème de M. Strebor.

SUR UN THÉORÈME DE M. FAURÉ;

PAR M. J. MENTION.

Avant de déduire ce théorème d'une remarque très-simple, j'apporterai à un énoncé trop général une restriction qui ne change rien aux conséquences que j'en ai tirées dans diverses circonstances. Si l'on admet *le cercle conjugué imaginaire* par rapport à un triangle acutangle, on peut dire que les quatre cercles conjugués relatifs aux triangles d'un quadrilatère ont toujours le même axe radical. Mais pour le *cercle des hauteurs,* ou le cercle qui a son centre au point de rencontre des hauteurs et un rayon moyen proportionnel entre les segments dans lesquels chaque hauteur est divisée, c'est différent.

Il n'est pas toujours exact de dire que les quatre cercles de hauteurs d'un quadrilatère aient pour axe radical la ligne des milieux de ses diagonales. Tous les points de rencontre des hauteurs ont, effectivement, la même puissance en valeur absolue par rapport aux cercles décrits sur les diagonales comme diamètres : mais il arrivera souvent que deux de ces puissances seront négatives. La médiane sera alors l'axe radical de deux seulement des cercles de hauteurs et aussi du cercle circonscrit au triangle diagonal.

THÉORÈME. — *La puissance du centre d'une conique, par rapport au cercle circonscrit à un triangle conjugué,*

est égale à la somme algébrique des carrés de ses demi-axes (*Nouvelles Annales*, t. XXI, p. 16).

Démonstration. — La puissance du centre, par rapport au cercle des hauteurs d'un triangle circonscrit à une conique, est égale à la somme algébrique des carrés des demi-axes (*). Or, un triangle conjugué est toujours le triangle diagonal d'un quadrilatère circonscrit, pour lequel deux au moins de quatre cercles des hauteurs ont le même axe radical avec celui qui est circonscrit au triangle diagonal....

Parabole. — Le centre du cercle circonscrit à un triangle conjugué est un point de la directrice. Cela se voit comme plus haut, ou autrement, puisque ce centre est le point de rencontre des hauteurs du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; et le nouveau triangle est circonscrit à la parabole.

SUR LES SURFACES ANALLAGMATIQUES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. MOUTARD.

I (**).

La ligne d'intersection de chaque *surface directrice* et de la *sphère principale* correspondante est une *ligne focale* de la surface anallagmatique.

Cette ligne, en effet, peut être considérée comme le lieu

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 453, et t. IX, p. 5.

(**) Cette Note a été présentée à la Société Philomathique le 30 juillet 1864; elle fait suite à l'article inséré dans ce volume (p. 306).

Ce premier article, que nous avions extrait du journal *l'Institut*, a été présenté à la Société Philomathique le 14 mai 1864.

des centres des sphères, de rayon nul, doublement tangentes à la surface; ou, ce qui revient au même, comme une ligne double de la développable circonscrite à l'anallagmatique et au cercle de l'infini.

Lorsque deux surfaces anallagmatiques ont en commun une ligne focale, elles ont les cinq mêmes pôles principaux et les cinq mêmes lignes focales; elles sont dites homofocales.

Deux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre homofocales se coupent partout à angle droit; leur ligne d'intersection est une ligne de courbure de chacune des surfaces.

Par tout point de l'espace il est possible de faire passer trois surfaces anallagmatiques du quatrième ordre ayant une ligne focale donnée. Pour en obtenir les directrices, il suffit de construire les trois surfaces du second ordre, qui contiennent la ligne focale et sont tangentes au plan, lieu des points de même puissance par rapport à la sphère principale et au point donné.

De tout cela il résulte que les anallagmatiques homofocales du quatrième ordre forment un système triplement orthogonal.

II (*).

Parmi les cinq surfaces directrices homofocales d'une surface anallagmatique donnée du quatrième ordre, il y a toujours un hyperboloïde à une nappe, il peut y en avoir trois.

Considérons le quadrilatère formé par quatre génératrices rectilignes de l'un de ces hyperboloïdes et les sphères doublement tangentes à l'anallagmatique ayant leurs centres aux sommets de ce quadrilatère. La surface anallagma-

(*) Ce qui suit a été présenté à la Société Philomathique dans la séance du 6 août 1864. Nous l'avons extrait du journal *l'Institut*.

tique peut être considérée comme le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à deux sphères opposées (dont les centres sont deux sommets opposés du quadrilatère dont il vient d'être question) est dans un rapport constant, positif ou négatif, avec le produit des puissances par rapport aux deux autres sphères (*).

Ce rapport constant est égal à celui des segments déterminés par le centre de la surface directrice sur la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère. La sphère principale n'est autre, du reste, que la sphère orthogonale aux quatre sphères données.

En particularisant le quadrilatère, on arrive à diverses définitions de l'anallagmatique parmi lesquelles nous citerons celle-ci :

Une anallagmatique du quatrième ordre peut, en général, être définie de dix manières différentes comme le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est dans un rapport constant avec le produit des distances à deux plans fixes.

L'anallagmatique la plus générale ne peut pas être définie comme le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est dans un rapport constant avec le produit des distances à deux autres points fixes.

Pour qu'une anallagmatique soit susceptible d'une pareille définition, il faut et il suffit que l'on puisse inscrire dans la ligne focale un quadrilatère formé par quatre génératrices rectilignes de la surface directrice. Lorsqu'il existe un pareil quadrilatère, il en existe une infinité d'autres.

On rencontre ainsi un théorème indépendant des anallagmatiques, tout à fait analogue au célèbre théorème de

---

(*) *Voir*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1864, p. 157, une définition analogue du tore donnée par M. Darboux.

M. Poncelet sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux coniques : dans la courbe d'intersection d'un hyperboloïde et d'une autre surface du deuxième ordre, il est, en général, impossible d'inscrire un polygone d'un nombre pair donné de côtés formé par des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde; mais lorsqu'on pourra en trouver un, il en existera une infinité d'autres.

Ce théorème se déduit de celui de M. Poncelet par une simple perspective.

SUR L'INTERSECTION DE DEUX CONES;

PAR M. CH. DE TRENQUELLÉON,
Élève de l'École Normale.

THÉORÈME I. — *L'intersection de deux cônes circulaires droits, dont le second a son sommet dans le plan de la base du premier, son axe parallèle à celui du premier et la même hauteur que le premier, se projette sur le plan de la base suivant un ovale de Descartes.*

Considérons, en effet, un point M de cette intersection; par ce point menons un plan parallèle aux plans des bases. Si l'on désigne par r et r' les rayons des deux parallèles, par R et R′ les rayons des deux bases, par h la distance du sommet A du premier cône au parallèle et par H la hauteur commune des deux cônes, il viendra

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H}, \quad \frac{r'}{R'} = \frac{H-h}{H};$$

en ajoutant, il vient

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = 1;$$

la projection est donc un ovale de Descartes dont les foyers sont le centre de la base du premier cône et le sommet du second.

En employant une méthode analogue à celle que nous venons d'indiquer pour prouver le théorème I, on établira la proposition suivante :

Théorème II. — *L'intersection de deux cônes circulaires droits, dont les bases sont dans le même plan et dont les hauteurs sont différentes, se projette sur le plan des bases suivant un ovale de Descartes.*

Théorème III. — *L'enveloppe d'une série d'ovales de Descartes, dont l'un des foyers* A *reste fixe et dont l'autre se meut suivant une ligne droite* MN (*les autres paramètres de l'équation de la courbe restant constants*), *se compose de deux coniques.*

D'après le théorème I, l'enveloppe cherchée sera la projection sur le plan MNA de l'intersection d'un cône circulaire droit C, dont la base a pour centre le point A et un rayon convenablement choisi, avec l'enveloppe d'une série de cônes circulaires droits C_1, ayant pour sommets les différents points de la ligne MN, des axes parallèles à celui du cône C et un angle au sommet déterminé. L'enveloppe des cônes C_1 se composant de deux plans passant par la ligne MN et inclinés sur le plan MNA d'un angle complémentaire de celui des cônes C_1, l'enveloppe cherchée se compose à son tour de deux coniques.

Théorème IV. — *L'enveloppe d'une série d'ovales de Descartes, dont l'un des foyers* A *reste fixe et dont l'autre se meut suivant un cercle* O (*les autres paramètres de l'équation de la courbe restant constants*), *se compose de deux ovales de Descartes ayant pour foyers les points* O et A.

Le théorème I nous montre que l'enveloppe cherchée est la projection sur le plan du cercle O de l'intersection d'un cône circulaire droit C, dont la base a pour centre le point A et un rayon déterminé, avec l'enveloppe d'une série de cônes circulaires droits C_1, ayant pour sommets les différents points du cercle O, des axes parallèles à celui du cône C et un angle au sommet déterminé. Or, l'enveloppe des cônes C_1 se compose évidemment de deux cônes symétriques par rapport au plan du cercle O, ayant pour base commune le cercle O et pour angle au sommet l'angle des cônes C_1. L'enveloppe des ovales de Descartes satisfaisant aux conditions de l'énoncé se compose donc de deux ovales de Descartes ayant pour foyers les points O et A.

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE QUESTIONS TRAITÉES ANALYTIQUEMENT DANS LES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. A. DE P.,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

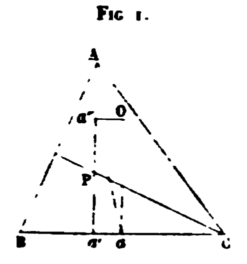
Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle dit des neuf points de ce triangle.

Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de concours des trois hauteurs.

Remarque préliminaire. — Dans tout triangle, les milieux des trois côtés, les pieds des trois hauteurs, les milieux des droites qui joignent le point de concours des trois hauteurs aux sommets sont sur une même circonférence de cercle. De plus, si, ABC étant le triangle, a' le pied de la hauteur abaissée de A sur BC, a le milieu

de BC et a'' le milieu de AP, P étant le point de concours

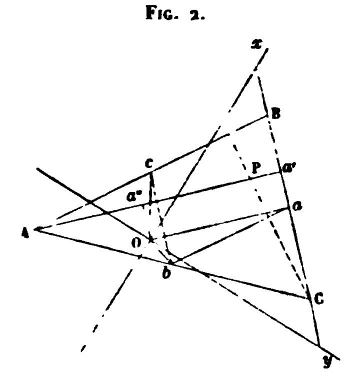
FIG. 1.



des hauteurs. on prend un point O sur le cercle des neuf points, l'angle $a''Oa$ est droit, car aa'' est un diamètre, l'angle $a''a'a$ étant droit.

Soient A, B, C trois points d'une hyperbole équilatère dont Ox et Oy sont les asymptotes; soit a le milieu de BC, c le milieu de AB. L'angle cOa est égal à l'angle ABC. En effet, d'après une propriété connue de l'hyper-

FIG. 2.



bole équilatère, l'angle que l'asymptote Ox fait avec AB est égal à l'angle que la même asymptote fait avec Oc, diamètre conjugué de AB. De même, l'angle que Ox fait avec BC est égal à l'angle aOx. L'angle en B étant égal à la somme de ces deux angles, l'angle ABC est par suite

égal à cOa : théorème que l'on peut énoncer ainsi :

L'angle que font entre elles deux directions est égal à l'angle que font entre eux les diamètres conjugués de ces directions.

Joignons c et b ainsi que b et a : l'angle $cba = B$. Donc les quatre points a, O, b, c sont sur une même circonférence de cercle qui est précisément le cercle des neuf points du triangle ABC.

Soit P le point de concours des hauteurs : la droite AP est perpendiculaire sur BC, le diamètre conjugué de AP est donc perpendiculaire sur Oa. Soit a'' le milieu de AP. D'après ce que nous avons vu, l'angle $a''Oa$ est droit; donc a'' est un point du diamètre conjugué de AP; donc P appartient à l'hyperbole, puisque A est située sur cette courbe.

Réciproquement, si une hyperbole, passant par les trois sommets d'un triangle, passe par le point de concours des hauteurs, cette hyperbole est équilatère. En effet, prenons un cinquième point sur l'hyperbole proposée différant des quatre premiers. Par les trois points, sommets du triangle, et ce dernier point, on peut toujours faire passer une hyperbole équilatère qui passe aussi par le point de concours des hauteurs; donc les deux coniques ont cinq points communs, elles se confondent; la première est donc équilatère.

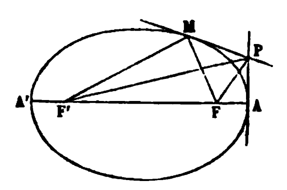
Énoncé. — *Les bissectrices des angles que les rayons vecteurs d'un point quelconque de l'ellipse font avec le grand axe se coupent sur la tangente à l'un des sommets situés sur le grand axe.*

Le point de rencontre est sur la tangente à l'ellipse au point considéré.

Démonstration. — Soient F et F' les deux foyers, A et A' les deux sommets situés sur le grand axe, M et M' un

point situé sur l'ellipse. Menons la tangente en M. Soit P son point de rencontre avec la tangente en A. Joignons

Fig. 3.



FM, FP, F'M, F'P et FF'A : la droite F'P est bissectrice de l'angle MF'A, car on sait que l'angle sous lequel une corde est vue d'un foyer a pour bissectrice la droite qui va du foyer au pôle de la corde. De même, la droite FP est bissectrice de l'angle A'FM.

Les théorèmes se trouvent donc démontrés. La même démonstration s'applique à l'hyperbole et toutes les conséquences s'en déduisent très-simplement (*).

CORRESPONDANCE.

Extrait de diverses lettres de M. Catalan. — 1. Si l'équation d'une courbe est mise sous la forme $u = \frac{1}{\varphi(\omega)}$, les points d'inflexion de cette ligne sont déterminés par l'équation

$$\varphi(\omega) + \varphi''(\omega) = 0.$$

2. Si le premier membre d'une équation est une somme de deux carrés $P^2 + Q^2$, on peut, *de deux infini-*

(*) *Voir* page 111. MM. Toubins, Douradou et Picquet nous ont aussi adressé des démonstrations très-simples de ce théorème.

tés de manières, le transformer en une autre somme de deux carrés, au moyen des formules

$$P' = P\cos\alpha - Q\sin\alpha, \quad P'' = P\cos\alpha + Q\sin\alpha,$$
$$Q' = P\sin\alpha + Q\cos\alpha, \quad Q'' = P\sin\alpha - Q\cos\alpha.$$

3. De là résulte que l'équation de l'hyperboloïde à une nappe étant mise sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1,$$

les génératrices sont représentées par

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\alpha - \sin\alpha, \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\alpha + \sin\alpha,$$
$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\alpha + \cos\alpha, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\alpha - \cos\alpha.$$

4. Les normales à une surface du second ordre, menées par les différents points d'une section parallèle à un plan principal, rencontrent deux droites fixes.

5. *Sur la décomposition des fractions rationnelles.* — La méthode proposée par M. Realis se trouve dans mon *Manuel des Candidats* (t. I, p. 242). Contrairement à l'opinion de votre savant collaborateur, je dis, à l'endroit cité : « Malheureusement, le calcul des dérivées de la fraction... est presque toujours fort compliqué. »

Du reste, cette méthode, d'une simplicité plus apparente que réelle, est loin d'être nouvelle : je l'ai inventée (après Euler!) étant élève à l'École Polytechnique; elle me valut, à cette époque, un curieux autographe de Poisson.

6. *Méthode de Schwab.* — En lisant, dans le numéro de juillet, la Note de M. M., j'avais bien reconnu que l'auteur a fait, sans le vouloir, une nouvelle édition de

l'intéressant article publié autrefois par M. Armand Farcy (*Nouvelles Annales*, t. III, p. 582).

A propos de Schwab, j'ajouterai un détail curieux, et probablement peu connu. La remarquable et élégante *méthode des isopérimètres* est due à Descartes. Dans un Mémoire d'Euler, que j'ai lu il y a environ vingt-cinq ans, le grand géomètre, après avoir exposé cette méthode, ajoute à peu près ceci : « La démonstration que je viens de faire connaître a été donnée par M. Descartes; depuis la mort de ce philosophe, elle a été oubliée; c'est pour qu'elle ne le soit plus que je l'expose de nouveau. »

7. *Division d'un polynôme entier, etc.* (p. 467). — La question n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

Soit $f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, *et soit* $\mathrm{F}(x)$ *un polynôme entier; le reste de la division de* $\mathrm{F}(x)$ *par* $f(x)$ *est*

$$f(x)\left[\frac{\mathrm{F}(a)}{(x-a)f'(a)}+\ldots+\frac{\mathrm{F}(l)}{(x-l)f'(l)}\right].$$

Démonstration *intuitive*, comme disait l'excellent et savant Terquem (*).

M. Fortunato Padula, de Naples. — On trouve dans le tome XII des *Nouvelles Annales* le théorème suivant dû à M. Steiner : « Par le point p et les sommets A, B, C d'un triangle on mène trois droites qui rencontrent respectivement les côtés en a_1, b_1, c_1 : si l'on a $\mathrm{A}p.\mathrm{B}p.\mathrm{C}p = a_1p.b_1p.c_1p$, le lieu des points p est une ellipse circonscrite au triangle et ayant pour centre le centre de gravité du triangle. » Cet énoncé est incomplet,

(*) Il suffit de démontrer que cette expression, évidemment de degré inférieur à $f(x)$, devient $f(a)$, $f(b)$,. ., $f(l)$, lorsqu'on fait $x=a$, $x=b,\ldots$, $x=l$. P.

à moins que l'on n'ajoute que les segments pA, pa, pB, pb, etc., sont tous de même sens ou de sens contraires. Si l'on n'apporte aucune restriction à l'hypothèse, le lieu comprend, outre l'ellipse signalée, une courbe du troisième ordre, qui passe également par les points A, B, C. Je crois cette remarque de quelque intérêt, soit pour faire connaître une propriété analogue d'une conique et d'une courbe du troisième ordre, soit pour faire ressentir la nécessité de l'usage des signes introduits par M. Chasles dans la Géométrie. (*Extrait d'une lettre adressée à M. Terquem* en 1854.)

M. Bellavitis, de Padoue. — En vous signalant la méthode indiquée (p. 121) pour résoudre les équations du quatrième degré, je n'ai pas prétendu m'en attribuer l'invention. Je voulais seulement dire que je la regardais comme la plus commode de celles que l'on peut employer; mais je dois reconnaître que c'est une des plus anciennes dont on se soit servi.

BIOGRAPHIE.

ADOLPHE GUIBERT (*).

« Connaître GUIBERT, c'était l'estimer et l'aimer. » C'est ainsi que l'un des anciens élèves de l'École de Sorèze caractérisait, dans un dernier adieu, l'homme de bien, le savant modeste, à la mémoire duquel nous venons consacrer un pieux souvenir.

L'Ecole de Sorèze, un peu militaire, surtout à l'époque

(*) Mort à l'âge de soixante-huit ans, le 30 mai 1864.

où Guibert y est entré, fournissait à l'École Polytechnique un large contingent de sujets distingués. Ses aptitudes spéciales l'avaient dirigé vers les sciences mathématiques; il était élève de l'École Polytechnique en 1814 et 1815, et à cette dernière date il défendait Paris au milieu des artilleurs parisiens.

Militaire d'un jour, d'un jour patriotique, il ne voulut pas continuer à l'être, et il entra dans la carrière de l'enseignement mathématique. Il fut l'un des fondateurs de l'Association Polytechnique, dont le but était de populariser la science. Il mérita plus tard d'être admis, par voie de concours, comme répétiteur à l'École où il avait reçu l'enseignement.

Professeur de Mathématiques élémentaires au collége Louis-le-Grand, il se distingua par la précision et la clarté de son enseignement; l'un des premiers il apporta quelques heureuses modifications à la *Géométrie* de Legendre. Ses nombreux succès le désignèrent comme successeur naturel de Richard dans la chaire de Mathématiques spéciales. Le magnifique enseignement de notre maître ne fut pas amoindri, et cependant le trop modeste professeur ne fut pas à l'abri de l'envie et même de la médisance.

Membre de la Commission chargée de la révision des programmes, il lutta pour conserver à l'enseignement des lycées le degré d'élévation que des tendances funestes auraient pu lui enlever. Examinateur pendant plus de vingt-cinq années pour l'admission à l'École Navale, il put du moins faire prévaloir les bonnes traditions. La croix de la Légion d'honneur et le poste d'inspecteur de l'Université furent la récompense officielle de ses bons services.

Les lecteurs des *Nouvelles Annales* ont pu apprécier la sagacité de Guibert dans ses recherches sur la théorie

des nombres, recherches qu'il laisse inachevées. Nous terminerons cette Notice par l'analyse succincte d'un Mémoire de Mécanique, qui lui servit de thèse pour obtenir le grade de docteur près la Faculté des Sciences de Paris.

Dans la première partie, l'auteur expose les *propriétés générales de l'équilibre d'un système de corps.* — Énoncé général et démonstration du principe des vitesses virtuelles de Jean Bernoulli. — Méthode des multiplicateurs de Lagrange. — Théorème de Leibniz.

Dans la seconde partie se trouvent exposées les *propriétés générales du mouvement d'un système de corps.* — Principe de d'Alembert, employé d'abord par Jacques Bernoulli comme moyen particulier de solution, ainsi que l'observe Lagrange dans sa lumineuse histoire du fameux problème du centre d'oscillation. — D'Alembert en voit la portée et en déduit une méthode générale pour mettre en équation les problèmes de Dynamique. — Principe des aires, conservation des forces vives. Sur ce sujet, l'auteur observe judicieusement, ce que Laplace ne remarque point dans sa démonstration du même principe (*Mécanique céleste,* liv. I), qu'on ne saurait toujours remplacer les vitesses virtuelles par les vitesses effectives. — Le Mémoire se termine par l'exposé du principe de la moindre action.

Ce Mémoire, plein de détails instructifs, se distingue surtout par un esprit profondément philosophique.

F.-A. Beynac,
Professeur.

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL; par M. *J. Bertrand*, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collége de France. CALCUL DIFFÉRENTIEL (*), beau volume in-4 de XLIV-780 pages avec figures dans le texte. Paris, 1864. Imprimerie et librairie de Gauthier-Villars. — Prix : 30 francs.

L'Ouvrage dont M. Bertrand nous donne aujourd'hui le premier volume est destiné à faire connaître l'*Analyse infinitésimale* dans l'état où l'ont amenée les travaux les plus récents. Il est appelé à remplacer le grand Ouvrage de Lacroix, livre utile pour l'époque où il parut, mais fort arriéré depuis les découvertes de Cauchy, de Jacobi, de Gauss et de beaucoup d'autres Géomètres éminents de notre époque.

L'invention de ce que pendant longtemps on a appelé *les nouveaux calculs* fut une des plus brillantes du XVIIe siècle, époque où les sciences jetèrent un si vif éclat. Cependant il ne faudrait pas croire que l'*Analyse infinitésimale* ait été saluée à sa naissance comme un événement. Les grandes inventions, comme tous les phénomènes de l'ordre moral ou de l'ordre physique, sont soumises à ce que Leibniz a nommé *la loi de continuité:* elles ont de petits commencements, et leur importance ne se révèle qu'à la longue, par leurs fruits. Quand Leibniz

(*) Sous le rapport typographique, ce volume fait le plus grand honneur à l'imprimerie Mallet-Bachelier, aujourd'hui Gauthier-Villars, si habilement dirigée par M. Bailleul.

dépose le premier germe de la méthode dans un tout petit article de huit pages, il s'agit tout simplement d'une *Nouvelle méthode pour les maxima et les minima et les tangentes, qui n'est point arrêtée par les fractions ou par les radicaux, avec un nouveau genre de calcul pour ces sortes de questions* (*). Newton, qui avait fait de son côté la même découverte, l'expose incidemment dans le lemme II de la VIIIe proposition du second Livre des *Principes* (**), et n'en parle plus dans la suite de son ouvrage. Les illustres inventeurs avaient pour ainsi dire découvert un monde sans s'en douter.

Cependant la nouvelle méthode ne tarda pas à se répandre, surtout sur le continent. Cultivée, avec les notations de Leibniz, par les frères Bernoulli, le marquis de l'Hospital, Varignon, elle donna la solution de questions qu'on n'eût pas osé aborder par les anciennes méthodes. Ce ne fut néanmoins qu'après vingt ans de découvertes brillantes que les partisans des deux grands Géomètres soulevèrent une question de priorité et donnèrent lieu à une dispute à laquelle Leibniz et Newton devaient se mêler un peu plus tard.

Nous ne pouvons entrer ici dans les détails d'une controverse fameuse qui, aujourd'hui encore, ne paraît pas tout à fait apaisée. Les Géomètres qui y ont pris part ont trop souvent employé la forme du réquisitoire, c'est-à-dire qu'ils ont cherché des *indices* dans des circonstances étrangères à la question et plus propres à passionner le débat qu'à l'éclairer (***). Sans doute, dans le feu de la dispute où les deux adversaires se laissèrent entraî-

---

(*) *Acta Lipsiæ*, 1684.

(**) *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1687.

(***) Voici comment M. Lefort termine sa nouvelle et précieuse édition du *Commercium epistolicum de Analysi promota* : « Newton inspire l'admi-

ner par des amis trop ardents, ils eurent quelques torts réciproques. Mais, à de si illustres accusés, ne devrait-on pas accorder au moins le bénéfice des circonstances atténuantes (*), et excuser quelques vivacités de polémique, quand il s'agissait non-seulement de leur gloire, mais de leur honneur lui-même?

Pour bien juger cette fameuse querelle, il faut dégager les faits de tous les commentaires passionnés et de toutes les circonstances étrangères à la question. C'est ce qu'a fait M. Bertrand avec une grande hauteur de vue, et il arrive à cette conclusion que Newton et Leibniz ont un égal droit à la gloire de l'invention dont ils ont accepté sans réclamation le partage pendant vingt-cinq ans. « Il » n'existe, dit-il, aucune preuve contre la parfaite can- » deur des grands génies qui sont en cause, et l'on doit » accorder à tous deux l'honneur de la découverte qu'ils » déclarent tous deux avoir faite.... »

Et plus loin :

» ration, Leibniz attire davantage. Pour moi, il y a tout un monde de » passions et de préjugés entre l'esprit généreux qui correspondait avec » Bossuet et rêvait la réunion de toutes les communions chrétiennes, et le » sectaire ardent qui commentait l'*Apocalypse* et signalait l'Église de » Rome dans la onzième corne du quatrième animal de Daniel.» Qu'est-ce que tout cela fait à la question de priorité, et en quoi l'intolérance de Newton est-elle plus blâmable que l'intolérance de Bossuet?

(*) Pour montrer le mauvais caractère de Newton, des écrivains sérieux ont cité le témoignage de Whiston, son ami. Étrange ami, en vérité! Whiston vit dans l'intimité de Newton, en reçoit des bienfaits, est désigné par lui pour le remplacer dans sa chaire de Cambridge; tant que Newton vit, Whiston ne cesse d'écrire d'humbles commentaires sur les œuvres de son maître; mais lui mort, il l'attaque, et pour justifier une telle conduite, il lance contre Newton une accusation où le ridicule le dispute à l'odieux : « S'il eût été vivant quand j'écrivis contre sa chronolo- » gie, je n'eusse pas osé publier ma réfutation, car, d'après la connais- » sance que j'avais de ses habitudes, j'aurais dû craindre qu'il ne me » tuât! » Newton avait-il donc l'*habitude* de tuer ceux qui n'étaient pas de son avis?

« Leibniz et Newton partagent donc la gloire d'avoir
» inventé le *Calcul différentiel*, et, quoique différem-
» ment illustres, chacun d'eux doit être tenu pour ho-
» noré de s'être rencontré avec un tel émule. Bien qu'ils
» soient complétement d'accord sur le fond, on retrouve
» dans la forme qu'ils ont adoptée l'empreinte de leurs
» génies si dissemblables. L'un, plus préoccupé des lois
» de l'univers que de celles de l'esprit humain, semble
» voir surtout dans les nouvelles méthodes l'instrument
» de ses efforts pour pénétrer la nature, et leur assignant
» un but plus élevé en a mieux montré toute la portée.
» L'autre, qui mettait sa gloire à perfectionner l'art d'in-
» venter, a plus nettement marqué la route, et nous
» suivons encore les traces lumineuses qu'il a laissées.
» Le premier, ne produisant ses découvertes qu'après en
» avoir longuement mûri la forme, a pu donner à ses tra-
» vaux quelque chose de plus achevé et de plus ferme,
» et faire jaillir de sa pensée toutes les vérités qu'elle
» contient. Le second, plus habitué à marquer les grands
» traits, se plaisait à remuer les questions les plus va-
» riées, en éveillant des idées justes et fécondes qu'il
» laissait à d'autres le soin de suivre et de développer.
» Newton se croyait rarement obligé à énoncer la règle
» avant d'en faire l'application. Leibniz, au contraire,
» aimait à donner des préceptes et se montrait plus em-
» pressé à proposer de beaux problèmes qu'à suivre les
» détails de leurs solutions. Si Newton, plus diligent,
» avait publié dix ans plus tôt sa théorie des fluxions, le
» nom de Leibniz resterait un des plus grands dans l'his-
» toire de l'esprit humain; mais, tout en le comptant
» parmi les géomètres du premier ordre, c'est à ses idées
» philosophiques et à l'universalité de ses travaux que la
» postérité attacherait surtout sa gloire. Si Leibniz, au
» contraire, abordant plus tôt l'étude des Mathémati-

» ques, avait pu ravir à son rival l'honneur de leur
» commune découverte, on n'admirerait pas moins, dans
» le livre des *Principes*, avec la majesté des résultats obtenus, l'incomparable éclat des détails, et, en perdant
» ses droits à l'invention de *la méthode qui s'y trouve*
» *employée avec tant d'art,* Newton resterait placé au
» rang qu'il occupe aujourd'hui parmi les géomètres, je
» veux dire à côté d'Archimède et au-dessus de tous les
» autres. »

Il est impossible de mieux rendre le caractère propre de chaque rival, et cette heureuse diversité de génie qui a plus servi la science que ne l'aurait fait une entière conformité de vues. Il y a cependant un point sur lequel nous ne pouvons pas être tout à fait d'accord avec M. Bertrand. Si Newton, dans son livre des *Principes, a employé avec tant d'art la méthode infinitésimale,* il faut avouer que cet art était bien caché, puisque le calcul des fluxions n'apparaît à la surface qu'en deux ou trois endroits de l'ouvrage. A la vérité, c'est une opinion assez répandue que Newton avait obtenu par le calcul tout ce qu'il y a d'important dans ses Principes, mais que pour dissimuler sa marche il avait présenté les résultats sous une forme purement géométrique. Mais nous ne pouvons voir là qu'une conjecture dénuée de preuves et due à une sorte de préjugé, car il y a des préjugés même en Mathématiques. Vers le milieu du dernier siècle, la Géométrie était devenue comme une langue étrangère à la plupart des mathématiciens. Euclide, qu'on ne lisait plus, passait pour un auteur plein d'obscurités impénétrables (*),

---

(*) M. Biot, auquel on doit tant de précieux éclaircissements sur la vie de Newton, tombe dans ce préjugé : « Qu'après avoir étudié, dit-il, les
» premières propositions d'Euclide, Newton ait successivement cherché et
» trouvé la démonstration des autres par lui-même, plutôt que de s'en-
» fonçer dans une lecture *si excessivement pénible par les formes dont elle*

et ceux qui employaient exclusivement le calcul, ou ce que l'on appelle improprement l'*Analyse mathématique*, croyaient de bonne foi qu'il n'y a pas d'autre instrument de découverte. Sans doute Newton n'a pas donné le premier jet de son esprit, et, par cela même qu'il élevait lentement (*) un système dont toutes les parties devaient se lier et se soutenir mutuellement, il a dû bien souvent revenir sur l'ordre qui s'était offert à lui tout d'abord; mais rien n'autorise à croire qu'il se soit imposé cette gêne perpétuelle de penser dans une langue et d'écrire dans une autre. Et pourquoi se donner tant de mal? Pour dissimuler la route suivie? Il faudrait donc supposer que Newton, par je ne sais quelle vanité inintelligente, aurait caché des découvertes analytiques du premier ordre, et qui pouvaient ajouter à sa gloire déjà si grande.

Ces raisons suffisent pour rejeter une hypothèse qui, d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit, n'est appuyée sur aucune preuve authentique. Nous croyons, avec M. Chasles, un bon juge en fait d'invention géométrique, que Newton a trouvé la plupart de ses inventions par la Géométrie, et que le meilleur moyen de faciliter la lecture de son immortel ouvrage serait un Commentaire fait dans l'esprit et les formes de la Géométrie moderne.

» *est hérissée*, voilà ce qui peut se comprendre; et surtout s'il avait déjà » pris connaissance des mêmes propositions pour ses jeux d'enfant, dans » quelque livre vulgaire, on concevra mieux encore qu'il ait jugé inutile » de perdre son temps dans une *si fatigante lecture*. » Ainsi, voilà M. Biot obligé de recourir à des hypothèses plutôt que d'admettre qu'une intelligence comme celle de Newton a pu comprendre un livre élémentaire qui aujourd'hui encore initie les jeunes Anglais à la connaissance de la Géométrie.

(*) C'est cette lenteur qui a fait accuser Newton de cacher obstinément ses inventions, comme si l'auteur d'un ouvrage de longue haleine était tenu de le communiquer au public chapitre par chapitre.

Après cette digression, peut-être un peu longue, sur un point d'histoire à peine effleuré par M. Bertrand, nous laisserons sa Préface si remarquable pour nous occuper du fond de l'ouvrage.

Le nouveau *Traité de Calcul différentiel* est divisé en trois Livres.

Le premier Livre, divisé en huit Chapitres, est consacré à l'*étude des différentielles et des dérivées*.

Dans le premier Chapitre, l'Auteur établit les *notions fondamentales sur les différents ordres d'infiniment petits* et les théorèmes par lesquels on démontre dans quels cas on peut négliger certaines quantités sans altérer le résultat définitif du calcul. Des applications géométriques montrent immédiatement le vrai sens des termes employés. Les objections que l'on a faites bien souvent à la *méthode infinitésimale* sont presque toujours des querelles de mots : elles tombent dès qu'on ne voit dans certaines formes de langage que des phrases abrégées, dont le sens ne doit pas être cherché ailleurs que dans les locutions complètes qu'elles sont destinées à remplacer. En un mot, le *Calcul différentiel* est une langue qu'on apprendra plutôt par l'usage que par les longues dissertations des grammairiens.

Le second Chapitre est consacré *aux dérivées et aux différentielles du premier ordre*. C'est une théorie devenue aujourd'hui élémentaire et qu'on enseigne avec raison dans les Cours de Mathématiques spéciales.

Dans le troisième Chapitre, M. Bertrand expose la théorie entièrement neuve des *déterminants de fonctions*. L'analogie entre les déterminants et les dérivées est complète, et l'importance des applications donne à cette ingénieuse conception de Jacobi le droit de figurer parmi les principes de la science.

Les autres Chapitres de ce Livre font connaître *les dé-*

rivées d'ordre supérieur au premier, les différentielles des fonctions définies géométriquement, les formules relatives au changement des variables indépendantes et la formation des équations différentielles.

Le Livre II traite *des séries*. Il est divisé en dix Chapitres qui comprennent *une étude générale des séries* : la *série de Taylor et celle de Lagrange*, avec leurs principales applications, *les développements en fraction continue ou en produit d'un nombre infini de facteurs, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et celle des résidus* d'après Cauchy. Les deux derniers Chapitres, qui ne se lient pas d'une manière bien naturelle à l'objet du Livre II, font connaître *la valeur des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée*, ainsi que *la théorie des maxima et des minima*.

Le Livre III comprend *les applications géométriques* qui n'ont pu trouver place dans le Livre précédent. On y étudie la courbure des lignes et des surfaces, la théorie des courbes à double courbure, celle des lignes de courbure et les propriétés des lignes tracées sur une surface.

Chaque Chapitre est suivi, sous le titre d'*Exercices*, d'un certain nombre de théorèmes qui n'étaient pas de nature à prendre place dans l'ensemble. Enfin l'ouvrage est terminé par une Table alphabétique des matières, destinée à faciliter les recherches, utile appendice dont MM. les Éditeurs se montrent trop avares aujourd'hui.

L'Ouvrage de M. Bertrand, d'une lecture facile, où la Géométrie et l'Analyse sont heureusement alliées, renferme tont ce qu'il y a d'essentiel à connaître dans le *Calcul différentiel*. On y signalera des lacunes, cela est inévitable. Il est aussi impossible de faire un Traité complet qu'une collection complète dans quelque genre que ce soit. C'est ce que l'Auteur a d'ailleurs bien compris. « Je voudrais, dit-il, pouvoir offrir aux jeunes Géo-

» mètres le moyen d'étudier les travaux des maîtres de
» la science sans être jamais arrêté par l'ignorance des
» principes sur lesquels ils reposent; mais un tel pro-
» gramme s'étendrait presque sans limites, et j'ai dû me
» borner, dans la limite de mes forces et de mon érudi-
» tion, à aplanir pour eux les premiers pas. On peut
» faire beaucoup mieux, sans doute, mais sans parvenir,
» j'en ai la conviction, à surmonter toutes les difficultés.
» Peut-être même aurait-on tort de le regretter; rien ne
» peut suppléer à l'étude directe des grands maîtres, et
» en aidant les jeunes gens à s'en affranchir trop long-
» temps, il pourrait arriver qu'en facilitant leurs études
» on retardât en eux, pour bien longtemps peut-être, le
» développement de l'esprit d'invention. »

E. PROUHET.

(Extrait de la *Revue de l'Instruction publique* du 3 novembre 1864.)

NOUVELLE ARITHMÉTIQUE THÉORIQUE ET PRATIQUE; par *E.-A. Tarnier*, Docteur ès Sciences, Officier de l'Instruction publique, Chevalier de la Légion d'honneur, Inspecteur de l'Instruction primaire à Paris. 3e édition. In-12 de 290 pages. Paris, 1864.

Ce Traité d'Arithmétique se recommande par l'ordre des idées, la clarté du style et la simplicité de l'exposition: la science y est mise à la portée du sens commun. Il est vrai qu'on n'y trouve aucune dissertation profonde sur la *nature* des nombres et des opérations auxquelles on les soumet : pour ma part, je ne le regrette pas. La prétention à la profondeur des pensées nous a déjà valu assez d'écrits inintelligibles, dont les auteurs semblent se croire d'autant plus profonds qu'ils sont plus obscurs. Ce qu'il

y a de mieux établi dans des écrits de ce genre, c'est que leurs auteurs ne sont pas parvenus sans peine à rendre confuses et difficiles les notions les plus simples.

L'Arithmétique de M. Tarnier est divisée en six Livres. Le premier comprend le système de numération décimale et les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers. Quelques considérations préliminaires très-courtes se rapportent au nombre et à l'unité; les définitions que l'auteur en a déduites formulent en termes clairs et précis des idées qui se trouvent dans l'esprit de tout le monde. Le système de numération est exposé avec beaucoup de soin, et les opérations expliquées avec toute la simplicité possible.

Le second Livre traite des fractions ordinaires. Rien de ce qui peut en faciliter l'étude n'a été négligé. Chaque opération est nettement définie; les énoncés des règles pratiques sont toujours accompagnés d'exemples; les théories, réduites à leurs principes fondamentaux, ne contiennent aucune de ces propositions accessoires dont on peut à son gré augmenter ou diminuer le nombre, et qui donnent à l'exposition des éléments d'une science le caractère d'une œuvre de fantaisie.

Le troisième Livre a pour objet les fractions décimales. Les propriétés et les règles du calcul des nombres décimaux ont été établies d'une manière simple et naturelle, en écrivant ces nombres sous la forme de fractions à deux termes. La réduction en décimales d'un quotient ou d'une fraction ordinaire a donné lieu à d'utiles remarques sur la détermination des valeurs approchées.

Le quatrième Livre contient l'exposé très-complet et très-détaillé du système légal des poids et mesures. Des figures de Géométrie intercalées dans le texte mettent en évidence les relations de grandeurs qui existent entre les différentes *unités* de superficie, et servent à détermi-

ner facilement les rapports des différentes *unités* de volume. C'est, sans aucun doute, le moyen le plus sûr d'empêcher que l'on ne confonde le décimètre carré avec le dixième d'un mètre carré, le décimètre cube avec le dixième d'un mètre cube; l'expérience a fait voir que cette précaution n'a rien d'exagéré.

On trouve dans le cinquième Livre tout ce qu'il est important de connaître au sujet des nombres *complexes* provenant des divisions du temps; et, dans le sixième, la théorie élémentaire des grandeurs proportionnelles, suivie de ses applications aux questions d'*intérêt*, d'*escompte*, d'*association*, de *mélange* et d'*alliage*.

L'Ouvrage est terminé par plusieurs Notes intéressantes. Je mentionnerai particulièrement celles qui concernent les instruments de pesage et le nouveau titre monétaire.

Quelques propriétés des nombres ont été seulement énoncées; l'auteur renvoie pour leur démonstration à l'un de ses autres Ouvrages. Le Traité dont je viens de rendre compte s'adresse principalement aux commençants; il renferme toutefois les connaissances exigées pour l'obtention du grade de Bachelier ès Lettres, et convient d'ailleurs parfaitement aux élèves des Écoles industrielles et du commerce. G.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME III, 2e SÉRIE.)

Analyse.

Pages.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Analyses et Comptes rendus (*).

(*) Tous les comptes rendus non signés sont de M. Prouhet.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

(*) Solution incomplète (*voir* p. 415).

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME III, 2e SÉRIE.)

Note. — Sur 152 collaborateurs dont les travaux ont été insérés ou mentionnés, il y a 64 élèves dont 24 ont été admis à l'École Polytechnique et 4 à l'École Normale.

ERRATA.

Page 179, question 81, *au lieu de* MI = MN, *lisez* MI = IT.

Page 179, question 84, *au lieu de* un point commun, *lisez* deux points communs.

Page 183, question 115, *au lieu de* deux, *lisez* trois.

Page 184, question 129, un cône et un cylindre, *ajoutez* du second degré.

Page 419, ligne 17, *au lieu de* Sauvi, *lisez* Sauri.

Page 419, ligne 20, après *Dictionnaire mathématique*, *ajoutez* de Klügel.

Page 419, ligne 20, *au lieu de* Géométrie, *lisez* Goniométrie.

Page 422, ligne 9, *au lieu de* l.tang $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$, *lisez* log tang $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$.

Page 427, ligne 2 en remontant *au lieu de* revvisiamo, *lisez* ravvisiamo.

Page 444, question IV, *ajoutez* que la fonction f doit être du degré $m-2$ au plus. — Question 712, homothétique, *ajoutez* et concentrique.

Page 456, ligne 13, *au lieu de* α, *lisez* λ.

Page 456, ligne dernière, *même correction*.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les cinq derniers volumes de la première série et dans les trois premiers de la deuxième.

TOME XVI, 1re série.

Nos.	Pages.
360	58
378, 379 et 381	180
383	182
385	183
398 à 400	390

TOME XVII.

Nos.	Pages.
414	31
424	33
429 et 430	139
434 et 437	186
439 et 441	187
444 et 445	262
447 et 448	358
454	434

TOME XVIII.

Nos.	Pages.
473	170
475	171
480 et 482	266
487	357
489	358
490	443
495 et 496	444

TOME XIX.

Nos.	Pages.
501	44
505 et 506	44
511 à 513	46
525 et 526	234
528 et 529	247
536	306
538 et 539	306
541	361
546 et 547	404
549	405

TOME XIX (suite).

Nos.	Pages.
552	406
554 et 556	464

TOME XX.

Nos.	Pages.
558 et 559	55
573	112
578	138
585	140
589 à 591	141
592 et 593	216
598 et 600	399

TOME Ier, 2e série.

Nos.	Pages.
604, 606 et 607	29
613	125
615	155
617	156
619	170
631	383

TOME II.

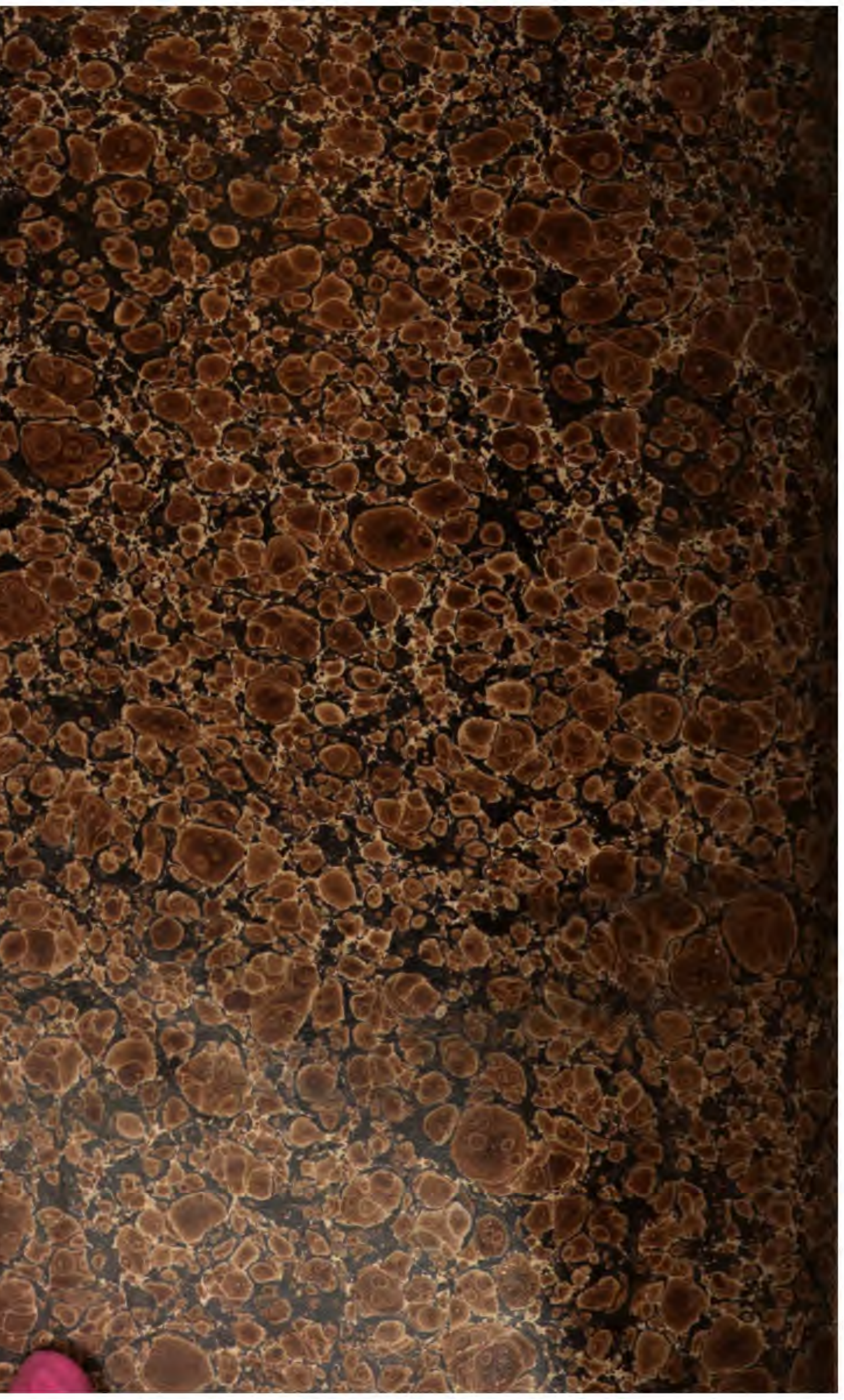
Nos.	Pages.
643	93
649	189
656	274
662	336
666	371
673 et 675	479
682 et 683	550

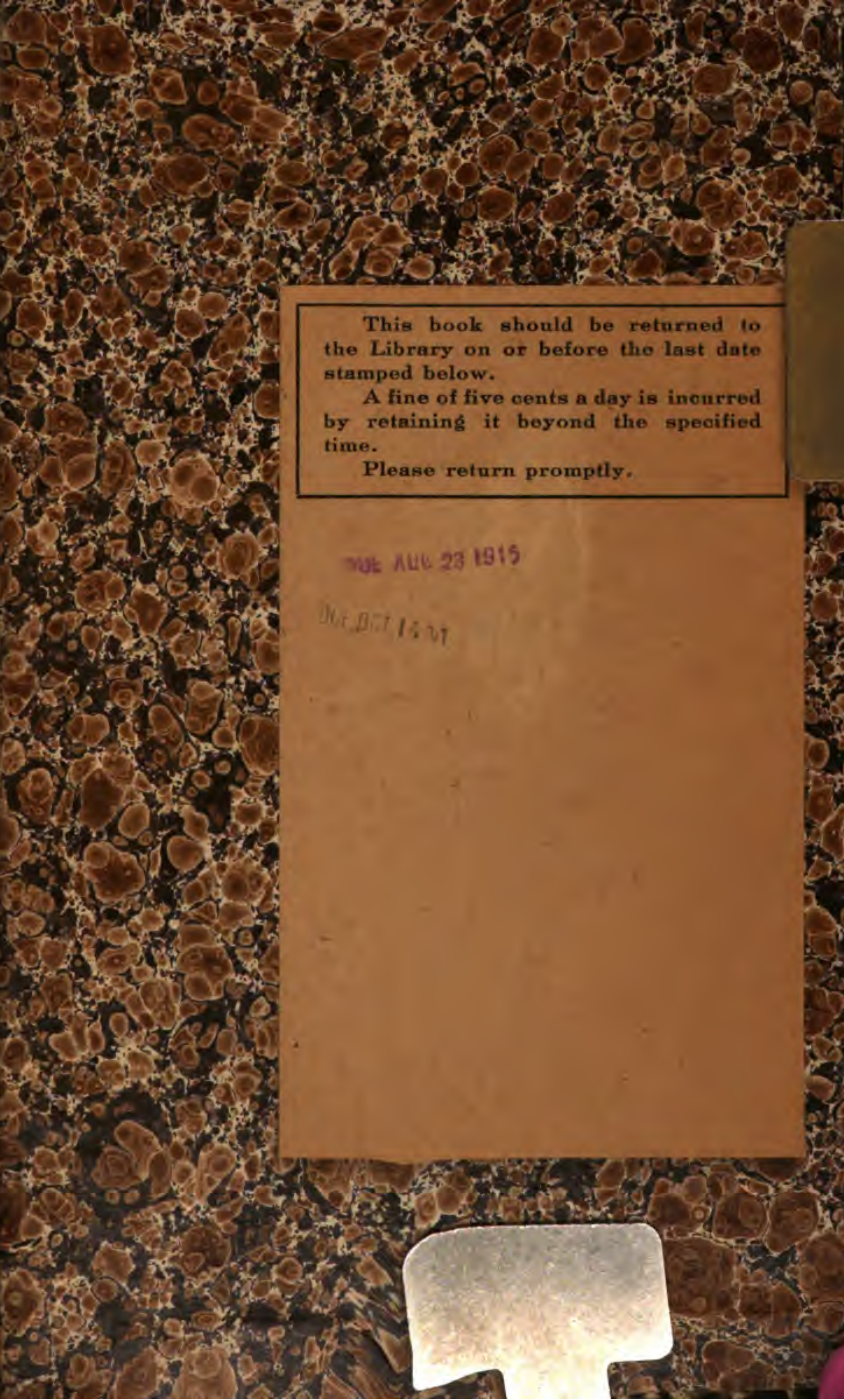
TOME III.

Nos.	Pages.
691	61
693	139
697	140
698 à 700	141
701, 703 et 705	176
706 et 707	252
708 à 717	442

FIN DU TOME III, 2e SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.






3 2044 102 935 111